Tome la Mejor Decisión

Experimentando Previamente sus Consecuencias

Casos Prácticos de Simulación Monte Carlo Mediante Hoja de Cálculo

Federico Garriga Garzón

OmniaScience

open access

Scholar

Tome la mejor decisión experimentando previamente sus consecuencias

Casos prácticos resueltos de simulación Monte Carlo mediante hoja de cálculo

Federico Garriga Garzón

Open Access Support

Si encuentra este libro interesante le agradeceríamos que diera soporte a sus autores y a OmniaScience para continuar publicando libros en Acceso Abierto.

Puede realizar su contribución en el siguiente enlace: http://dx.doi.org/10.3926/oss.35

Tome la mejor decisión experimentando previamente sus consecuencias

Casos prácticos resueltos de simulación Monte Carlo mediante hoja de cálculo

Autor:
Federico Garriga Garzón
Universitat Politècnica de Catalunya, España

ISBN: 978-84-946352-4-3
DOI: http://dx.doi.org/10.3926/oss.35

La ciencia sin espiritualidad nos lleva a la destrucción y a la infelicidad

Mahatma Gandhi

A quienes requieran modelar la complejidad

Índice

Prólogo 13

Introducción 15

1. Simulación - Casos **23**

1.1 CASO Quiosco de periódicos 25

1.2 CASO Máquinas herramienta 33

1.3 CASO Ventas de temporada 49

1.4 CASO Políticas de gestión de stocks 67

1.5 CASO Empresa comercializadora 81

1.6 CASO Estación de ensamblado 93

1.7 CASO Teorema Central del Límite 103

1.8 CASO Central de emergencias 111

1.9 CASO Capital Final esperado en un proyecto de inversión 119

1.10 CASO Análisis de inversiones 127

1.11 CASO Fórmulas de matriz 151

1.12 CASO Inversión en nueva tecnología 159

1.13 CASO Cuando llevar a cabo una simulación 169

1.14 CASO Cola de un supermercado con dos cajas 179

1.15 CASO Resolución de integrales 193

1.16 CASO Programación proyecto construcción chalet 217

1.17 CASO Lanzamiento de un nuevo producto 229

1.18 CASO Cálculo de áreas 237

1.19 CASO Cola Finita 243

1.20 Desarrollo del método Monte Carlo con hoja de cálculo 257

2. Generación de números pseudoaleatorios ***259***

2.1 Generadores congruenciales lineales *262*

2.1.1 Congruencial Mixto *264*

2.1.2 Congruencial Multiplicativo *267*

2.1.3 Congruencial Aditivo *270*

2.1.4 Congruencial Cuadrático *272*

2.1.5 Otros generadores congruenciales *274*

2.1.6 Método aditivo de dos series *275*

2.1.7 Generadores Combinados *275*

2.1.8 Generadores Múltiples Recursivos Combinados *276*

2.2 Generadores no congruenciales *278*

2.2.1 Método de los cuadrados medios de John Von Neumann y Nicholas Metropolis *278*

2.2.2 Productos medios *280*

2.2.3 Multiplicador constante *282*

2.2.4 Método de Lehmer *284*

2.3 Actividades *286*

2.4 Solución actividades *287*

3. Pruebas estadísticas para los números pseudoaleatorios ***291***

3.1 Prueba de uniformidad *293*

3.1.1 Prueba de Kolmogorov Smirnov *294*

3.1.2 Prueba de Chi Cuadrado *297*

3.2 Prueba de independencia *300*

3.2.1 Prueba de corridas (rachas) arriba y abajo *300*

3.3 Prueba de la media *305*

3.4 Prueba de varianza *307*

3.5 Actividades *309*

3.6 Solución actividades 311

***4 Generación de variables aleatorias* 315**

4.1 Generación de variables aleatorias discretas 317

4.1.1 Distribución de Poisson 318

4.1.2 Distribución de Bernoulli 323

4.1.3 Distribución Binomial 327

4.2 Método de la transformada inversa 332

4.2.1 Distribución Uniforme 333

4.2.2 Distribución Exponencial 335

4.2.3 Distribución Weibull 337

4.2.4 Distribución Empírica 339

4.2.5 Distribución Triangular 341

4.2.6 Distribución Geométrica 346

4.3 Método de composición o método de mezclas 349

4.3.1 Distribución Triangular 351

4.4 Método de la transformación directa 357

4.5 Método de convolución 363

4.5.1 Distribución Binomial 363

4.5.2 Distribución Binomial negativa 365

4.5.3 Distribución Normal 368

4.5.4 Distribución Erlang 371

4.5.5 Distribución Gamma 373

4.5.6 Distribución Beta 378

4.5.7 Distribución X^2 de Pearson a partir de la distribución Normal 382

4.5.8 Distribución X^2 de Pearson a partir de la distribución Gamma 385

4.6 Método de aceptación - rechazo 392

4.6.1 Distribución Normal estándar 406

4.7 Actividades *409*

4.8 Solución actividades *410*

5. Bibliografía y Lecturas recomendadas ***413***

Prólogo

La finalidad del libro es eminentemente didáctica, su publicación se justifica exclusivamente por razones pedagógicas. El libro ha sido concebido para acercar la simulación numérica a los estudiantes de las diversas Facultades, Escuelas Técnicas y Escuelas de Negocios con el objetivo de facilitarles el aprendizaje de la toma de decisiones en el ámbito de la gestión de organizaciones, toda vez que dotar a los profesionales de una metodología de ayuda a la toma de decisiones que les permita evaluar el comportamiento de su organización frente a las diferentes decisiones que puedan adoptar, lo que les posibilitará la elección de la mejor de ellas. En ningún caso esta obra pretende competir con los excelentes libros sobre simulación de sistemas que pueden encontrarse en el mercado, la ambición del presente texto se reduce a acercar a los decisores la habilidad de que puedan crear sus propios modelos y llevar a cabo sus experimentos sobre los mismos sin necesidad de contar un software específico para ello, sino simplemente con algo tan simple como una hoja de cálculo.

La simulación no es más que una herramienta de análisis que permite sacar conclusiones sin necesidad de trabajar directamente con el sistema real. El avance de la informática, en especial de las hojas de cálculo permite llevar a cabo simulaciones complejas en una sencilla hoja de cálculo accesible en cualquier ordenador, ofreciendo a los decisores la posibilidad de evaluar el comportamiento del sistema frente a sus decisiones antes de tomarlas, sin afectar al sistema y a coste prácticamente cero. Lo que no hace mucho tiempo requería de complejos programas hoy en día es posible en cualquier dispositivo que disponga de algo tan simple como una hoja de cálculo.

Uno de los principales retos del libro, sino el principal, es conseguir que el lector aprenda a construir modelos de situaciones reales, lo que le facultará para crear sus propios modelos y adoptar así las mejores decisiones posibles. Para ello se ha dispuesto un primer capítulo con diecinueve casos prácticos resueltos que permitan al lector ejercitar la construcción de modelos mediante la hoja de cálculo. Los restantes capítulos del libro recogen los conceptos teóricos que han venido desarrollándose sobre estadística computacional, en concreto el segundo capítulo describe la generación de números pseudoaleatorios distribuidos uniformemente (0, 1), el tercero un conjunto de pruebas estadísticas que deben superar los números generados para ser considerados aleatorios y por último, en el cuarto capítulo se explica cómo generar observaciones de una variable aleatoria a partir de la distribución especificada.

Introducción

Toda organización puede ser analizada como un **sistema**, es decir, un conjunto de **entidades** relacionadas que interactúan entre sí en base a las políticas de funcionamiento del sistema. Por su parte, un **modelo** es una representación simplificada del sistema real que intenta expresar los aspectos más relevantes del mismo. Cabe distinguir tres tipos de modelos:

- **Modelos icónicos:** representaciones a escala del sistema. Por ejemplo: maquetas, prototipos, plantas piloto, etc.
- **Modelos análogos:** visualizaciones gráficas o simbólicas de la realidad, en las que se establece una analogía entre el sistema y el modelo. No reproduce detalladamente el sistema real sino solo determinadas propiedades del mismo. Por ejemplo: mapas, gráficos, etc.
- **Modelos simbólicos:** codifican las características del sistema mediante el lenguaje matemático. Por ejemplo: codificación geométrica de los elementos de un edificio.

Los modelos icónicos y los análogos, son **modelos analógicos**, es decir, **modelos físicos** que pretenden ser una réplica física del sistema real. Mientras que en los modelos simbólicos la información está codificada, permitiendo así una representación de la realidad fácilmente manejable mediante un ordenador.

El proceso de modelado es muy importante dado que no sólo muestra el funcionamiento del sistema sino que **estimula su mejora**. Si bien un sistema puede modelarse de distintas maneras dependiendo del objetivo que desee alcanzar, resulta conveniente crear el modelo siguiendo un proceso de mejora continua, construya inicialmente un modelo muy simple que aproxime el sistema real y posteriormente vaya refinándolo hasta conseguir que su modelo reproduzca fielmente el sistema real. Tenga presente que modelar es una mezcla de arte, técnica y experiencia. El procedimiento de formulación del modelo requiere, entre otros, fijar las variables de entrada y las variables de salida del modelo, así como establecer las condiciones de vínculo entre ellas. Algunas de las variables de entrada deben ser controlables por el decisor, por ejemplo el número de servidores en el modelado de un sistema de colas, otras en cambio resultan incontrolables, por ejemplo la demanda. Las variables controlables son modificadas con el objetivo de experimentar diferentes alternativas de actuación en el sistema real.

Un buen modelo debe:

- Describir todas las propiedades importantes del sistema.
- Ser fácil de entender y modificar.
- Perseguir unos objetivos claros.

Con el objetivo de reducir el riesgo y la incertidumbre en el proceso de toma de decisiones, en lugar de interactuar con el sistema real construya un modelo que se corresponda con dicho sistema y posteriormente, una vez diseñado el modelo, realice experimentos en el mismo contrastando diferentes escenarios. El concepto de simulación involucra ambos conocimientos, el **diseño del modelo** y la **realización de experimentos** en el mismo, de tal suerte, que si el modelo se ajusta a la realidad, los resultados obtenidos de la simulación evidenciarán el comportamiento del sistema real.

Las principales metodologías de simulación son las siguientes:

- **Simulación continua.** Modela el sistema mediante ecuaciones que dependen del paso del tiempo de forma continua. Por ejemplo, en un avión volando, el estado del sistema cambia continuamente respecto al tiempo.
- **Simulación por eventos discretos.** El sistema cambia de estado cuando ocurren eventos. A diferencia de la simulación continua el paso del tiempo por sí solo no tiene ningún efecto sobre el sistema, en la simulación por eventos discretos el tiempo simulado avanza de un evento al siguiente. Ejemplo de sistema de eventos discretos sería una factoría de ensamblaje donde las piezas (**entidades**) son ensambladas en función de los pedidos (**eventos**). Las entidades son los elementos de interés que son seguidos a través del sistema, dichas entidades poseen **atributos** que caracterizan su comportamiento. Por su parte, los eventos son acontecimientos que modifican el estado del sistema, siendo el estado del sistema el conjunto de variables (atributos) que describen la condición del sistema en un momento determinado. Es decir, los valores tomados por los atributos de las entidades en un momento determinado precisan el estado del sistema.

  La simulación continua modela procesos mientras que la simulación por eventos discretos modela elementos individuales (entidades) del proceso. Los cambios de estado en el caso de la simulación continua se originan por cambios en el tiempo mientras que en la simulación por eventos discretos los ocasionan los eventos, siendo constantes los intervalos entre pasos de tiempo en el caso de la simulación continua y dependiente de cuando suceden los eventos en la simulación por eventos discretos.

- **Simulación basada en agentes.** Se basa en entidades individuales (agentes) que interactúan con otros agentes dentro de su lugar especificado. Si bien los agentes están obligados a seguir unas reglas, disponen de un grado de autonomía tal que no permite predefinir la dinámica del modelo. La información sobre la dinámica del modelo se obtiene a partir de la interacción de los agentes en el mismo, dado que los agentes pueden tener inteligencia, memoria, capacidad de aprendizaje, etc.
- **Simulación estado/acción.** El sistema se modela como un conjunto de estados discretos conocido (grafo de estado) donde cada estado depende de un estado anterior. Describe sistemas que responden a un evento mediante la transición a cualquier otro estado.
- **Simulación Monte Carlo.** No interviene el tiempo, se basa en la aleatoriedad usando números aleatorios para variar los valores de entrada. Los resultados de cada simulación se registran como una observación. De donde el resumen estadístico de las observaciones refleja el resultado más probable, el intervalo de resultados posibles, y la probabilidad de que sucedan los resultados.

La simulación de Monte Carlo, nombre que procede de la ciudad donde abundan los casinos de juego, enlaza el muestreo aleatorio con la capacidad de los ordenadores para generar números pseudoaleatorios y efectuar cálculos. Si bien esta técnica fue publicada por Nicholas Constantine Metropolis y Stanislaw Marcin Ulam en el Journal of the American Statistical Association en 1949, la técnica del muestreo estadístico ya había sido utilizada años antes, entre otros por Enrico Fermi en los años 30 mientras estudiaba la difusión del neutrón, y por los propios Metropolis y Ulam junto con John Von Neumann en el laboratorio de Los Álamos mientras trabajaban en proyectos de armas nucleares, entre otros investigaban la protección contra la radiación y la distancia que los neutrones viajan a través de diversos materiales. La complejidad de resolución analítica del problema no les permitió resolverlo mediante los métodos deterministas convencionales y Ulam propuso utilizar experimentos aleatorios, a continuación Von Neumann programó el primer ordenador digital (ENIAC) para llevar a cabo los cálculos. Desde su publicación se viene aplicando en todos los ámbitos donde el comportamiento aleatorio ejerce un papel fundamental para obtener soluciones de problemas complejos.

El método requiere que:

1. **Identifique las variables** cuyo comportamiento aleatorio fija el proceder global del sistema real.
2. **Determine el tipo de distribución de probabilidad** que mejor define el comportamiento aleatorio de cada una de las variables identificadas en el párrafo anterior.
3. **Modele fielmente la aleatoriedad** de dichas variables aleatorias.

Simular el comportamiento del sistema exige generar muestras aleatorias de cada variable que encajen con exactitud con la distribución de probabilidad que rige la conducta aleatoria de dicha variable. La generación de variables aleatorias X que sigan una distribución de probabilidad F(x) se consigue:

- Generando una sucesión de muestras de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en el intervalo (0, 1).

  Se denomina variable aleatoria uniformemente distribuidas en el intervalo (0, 1) a la variable aleatoria cuya función de densidad

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{si } x \in & (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin & (0,1) \end{matrix} \right\}$$

- Transformando la sucesión anterior para generar observaciones de la variable aleatoria deseada.

4. **Fije los objetivos y diseñe un modelo** del sistema real que involucre las partes más relevantes del mismo. Cualquier error en el modelo o su implementación puede dar lugar a conclusiones equívocas, por esta razón, antes de experimentar con el modelo conviene asegurarse que refleja fielmente el sistema real validando el mismo a partir de datos reales, para ello compare los resultados obtenidos de la simulación con los producidos por el sistema.
5. **Diseñe un experimento** así como las ejecuciones concretas del mismo, los escenarios que desea estudiar de forma que pueda alcanzar los objetivos fijados. El experimento, como se ha citado anteriormente, consiste en generar valores de las variables cuyo comportamiento fija la actuación del sistema, y analizar el proceder del mismo ante dichos valores.
6. **Repita el experimento n veces** con lo cual dispondrá de n observaciones sobre la conducta del sistema, lo que le permitirá entender su funcionamiento así como evaluar el desempeño del mismo frente a los diversos escenarios establecidos, facilitándole la elección de las mejores estrategias para su gestión.

El método Monte Carlo se basa, entre otros, en la Ley Fuerte de los Grandes Números: Dada una sucesión infinita de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (X_1, X_2,), todas ellas con valor esperado μ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots}{n} = \mu$$

La Ley Fuerte de los Grandes Números justifica el valor esperado de una variable aleatoria como el promedio a largo plazo de un muestreo repetitivo. Lo que dispone para aplicar Monte Carlo, ya que indica que con un número suficientemente grande de experimentos es posible estimar con mucha probabilidad y escaso error el parámetro deseado.

El error en la estimación de μ se distribuye, en virtud del teorema del límite central, normal con media cero y variancia σ^2/n. El error en la estimación se reduce a medida que aumenta *n*.

La velocidad de convergencia hacia μ está dirigida por la inversa de la raíz cuadrada de $n(1/\sqrt{n})$, siendo independiente de la dimensión de la variable aleatoria. Esto significa que si desea aumentar al doble la precisión en la estimación de μ debe multiplicar por cuatro el número de variables aleatorias uniformes generadas.

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot n}}$$

De igual forma, si desea ampliar en un dígito significativo la precisión del resultado deberá multiplicar por 100 el número de variables aleatorias uniformes generadas.

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{10} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot n}}$$

1 Simulación - Casos

La estadística es una ciencia que demuestra que si mi vecino tiene dos coches y yo ninguno, los dos tenemos uno.

George Bernard Shaw

1.1 CASO Quiosco de periódicos

Un quiosquero vende periódicos a 1,10 euros cada uno. Cada periódico le cuesta al quiosquero 0,90 euros. Las ventas de periódicos del quiosquero a partir de su experiencia se refleja en la tabla siguiente.

Periódicos	30	40	50	60	70
f(x)	20 %	25 %	25 %	20 %	10 %

La tabla recoge por ejemplo que el 20 % del tiempo las ventas han sido de 30 periódicos. Teniendo en cuenta el coste de 0,20 euros por venta perdida y el coste de 0,10 euros por el reciclaje de cada periódico no vendido, determine el beneficio promedio diario si pide 50 periódicos cada día.

Solución

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Las ventas de periódicos.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos históricos.

Periódicos	30	40	50	60	70
f(x)	0,20	0,25	0,25	0,20	0,10

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

Periódicos	30	40	50	60	70
f(x)	0,20	0,25	0,25	0,20	0,10
F(x)	0,20	0,45	0,70	0,90	1,00

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

Periódicos	30	40	50	60	70
f(x)	0,20	0,25	0,25	0,20	0,10
F(x)	0,20	0,45	0,70	0,90	1,00
Intervalos	0,00 a 0,19	0,20 a 0,44	0,45 a 0,69	0,70 a 0,89	0,90 a 1,00

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

0,86	0,95	0,19	0,30	0,48	0,24	0,97	0,52	0,93	0,24

PASO 6. Simule las ventas de un día y calcule el beneficio proporcionado por dichas ventas.

Día	Número aleatorio	Ventas simuladas	Ventas reales	Ventas perdidas	Periódicos no vendidos	Beneficio (€)	Beneficio promedio (€)
1	0,86	60	50	10	0	8	8,00

<u>Si Ventas simuladas > Pedido</u>

Ventas reales = Pedido

Ventas perdidas = Ventas simuladas - Pedido

Periódicos no vendidos = 0

<u>Si Ventas simuladas ≤ Pedido</u>

Ventas reales = Ventas simuladas

Ventas perdidas = 0

Periódicos no vendidos = Pedido - Ventas reales

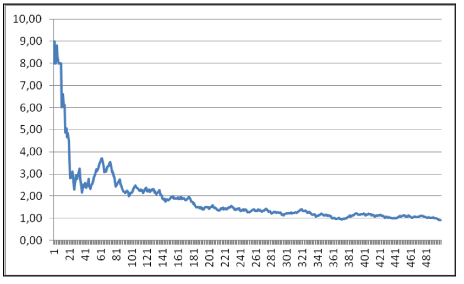
<u>Beneficio</u> = (Precio unitario de venta x Ventas reales) - (Coste unitario de adquisición x Pedido) - (Coste unitario de reciclaje x Periódicos no vendidos) - (Coste venta perdida x Ventas perdidas)

PASO 7. Repita el PASO 6 nueve días más.

Día	Número aleatorio	Ventas simuladas	Ventas reales	Ventas perdidas	Periódicos no vendidos	Beneficio (€)	Beneficio promedio (€)
1	0,86	60	50	10	0	8	8,00
2	0,95	70	50	20	0	6	7,00
3	0,19	30	30	0	20	-14	0,00
4	0,30	40	40	0	10	-2	-0,50
5	0,48	50	50	0	0	10	1,60
6	0,24	40	40	0	10	-2	1,00
7	0,97	70	50	20	0	6	1,71
8	0,52	50	50	0	0	10	2,75
9	0,93	70	50	20	0	6	3,11
10	0,24	40	40	0	10	-2	2,60

PASO 8. Obtenga la gráfica de estabilización que evidencia que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

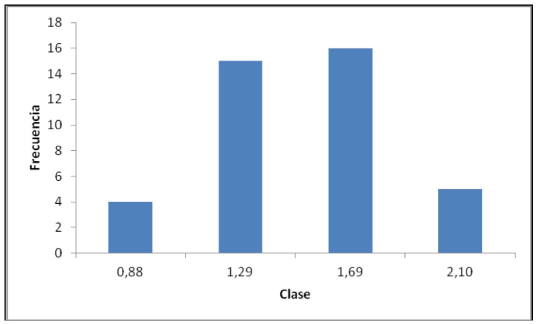
Vea en la gráfica que simulando 500 días con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del beneficio medio diario.



Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 9. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio medio diario en euros:



0,91	1,30	1,83	1,82	1,15
2,07	1,24	2,32	1,20	1,56
1,18	1,32	0,94	1,56	1,54
1,18	1,22	1,66	1,62	1,11
1,26	1,67	2,08	2,50	2,12
1,67	1,80	1,62	1,82	1,37
0,83	1,04	1,51	1,34	1,72
1,19	1,63	1,76	0,90	1,19

PASO 10. Calcule el beneficio medio diario y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 1{,}49 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}397 \text{ euros}$$

PASO 11. Halle el intervalo de confianza del beneficio medio diario con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0{,}72 \leq \mu \leq 2{,}27$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio medio diario en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 0,72 y 2,27 euros.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Periódicos	f(x)	F(x)	Límite inferior intervalo	Límite superior intervalo	Periódicos		
2	30	0,20	0,20	0,00	0,19	30		
3	40	0,25	0,45	0,20	0,44	40		
4	50	0,25	0,70	0,45	0,69	50		
5	60	0,20	0,90	0,70	0,89	60		
6	70	0,10	1,00	0,90	1,00	70		
7								
8	Ingreso por periódico			1,10	euros			
9	Coste de un periódico			0,90	euros			
10	Coste por venta perdida			0,20	euros			
11	Coste periódico no vendido			0,10	euros			
12	ESCENARIO		Pide	50	periódicos cada día			
13	Día	Número aleatorio	Ventas simuladas	Ventas reales	Ventas perdidas	Periódicos no vendidos	Beneficio euros	Beneficio promedio
14	1	0,86	60	50	10	0	8	8,00
15	2	0,95	70	50	20	0	6	7,00
16	3	0,19	30	30	0	20	-14	0,00
17	4	0,30	40	40	0	10	-2	-0,50
18	5	0,48	50	50	0	0	10	1,60
19	6	0,24	40	40	0	10	-2	1,00
20	7	0,97	70	50	20	0	6	1,71
21	8	0,52	50	50	0	0	10	2,75
22	9	0,93	70	50	20	0	6	3,11
23	10	0,24	40	40	0	10	-2	2,60

Número aleatorio

Casilla B14 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Ventas simuladas

Casilla C14 → BUSCARV(B14;$D$2:$F$6;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → BUSCARV(ALEATORIO();$D$2:$F$6;3)

Ventas reales

Casilla D14 → SI(C14>$D$12;$D$12;C14)

Ventas perdidas

Casilla E14 → SI(C14>$D$12;C14-$D$12;0)

Periódicos no vendidos

Casilla F14 → SI(C14>$D$12;0;$D$12-D14)

Beneficio euros

G14 → ($D$8*D14)-($D$9*$D$12)-($D$10*E14)-($D$11*F14)

Beneficio promedio

Casilla H14 → PROMEDIO($G$14:G14)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como iteraciones desee realizar.

1.2 CASO Máquinas herramienta

Una empresa dispone de varias máquinas herramienta cuyas herramientas de corte se desgastan constantemente. Cuando esto ocurre, la máquina es inservible. En la actualidad el mantenimiento es correctivo reemplazándose una herramienta cuando falla. Dado que cada máquina dispone de una torre con cinco herramientas, se propone reemplazar toda la torre de herramientas (las cinco herramientas de golpe) cada vez que falle una, lo que debería reducir la frecuencia de desgaste de las herramientas. El tiempo necesario para el reemplazo de una herramienta es de una hora. Las cinco pueden reemplazarse en dos horas. El coste de una hora de máquina parada es de cien euros. Cada herramienta cuesta diez euros. La tabla siguiente recoge los datos de averías en el caso de sustituir una sola herramienta cada vez.

Horas entre averías sí sustituye una herramienta	20	30	40	50	60	70	80
Probabilidad	0,05	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10

Si las cinco herramientas se cambian cada vez que una falla, la distribución de probabilidad entre fallos es la siguiente:

Horas entre averías sí sustituye cinco herramientas	30	40	50	60	70	80	90
Probabilidad	0,05	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10

1. **Determine mediante simulación la mejor política de reemplazo de las herramientas de corte.**
2. **Resuelva el caso sin el uso de la simulación y compare los resultados. Indique si esto afecta o no a la decisión tomada utilizando la simulación.**

SOLUCIÓN

1. **Determine mediante simulación la mejor política de reemplazo de las herramientas de corte.**

Sustitución de una herramienta

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Las horas entre averías.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos históricos.

Horas entre averías	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
f(x)	0,05	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

Horas entre averías	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
f(x)	0,05	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10
F(x)	0,05	0,20	0,35	0,55	0,75	0,90	1,00

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

Horas entre averías	20	30	40	50	60	70	80
f(x)	0,05	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10
F(x)	0,05	0,20	0,35	0,55	0,75	0,90	1,00
Intervalos	0,00 a 0,04	0,05 a 0,19	0,20 a 0,34	0,35 a 0,54	0,55 a 0,74	0,75 a 0,89	0,90 a 1,00

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

0,47	0,48	0,15	0,67	0,94

PASO 6. Simule una avería y calcule el coste por hora de funcionamiento.

Avería nº	Número aleatorio	Horas entre averías	Coste reemplazo	Coste por hora de funcionamiento
1	0,47	50	110	2,20

Coste reemplazo = coste máquina parada + coste herramienta

Coste reemplazo = 100 + 10 = 110 euros

$$\text{Coste por hora de funcionamiento} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{Coste reemplazo}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{Horas entre averías}_i} = \frac{110}{50} = 2{,}20\,\frac{\text{euros}}{\text{hora}}$$

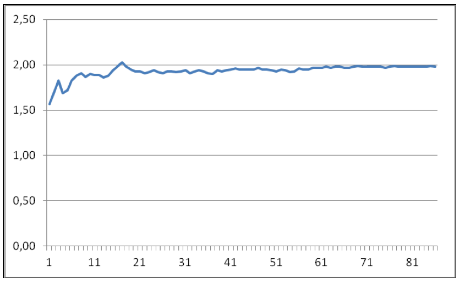
PASO 7. Repita el PASO 6 con los números aleatorios generados en el PASO 5.

Avería nº	Número aleatorio	Horas entre averías	Coste reemplazo	Coste por hora de funcionamiento
1	0,47	50	110	2,20
2	0,48	50	110	2,20
3	0,15	30	110	2,54
4	0,67	60	110	2,32
5	0,94	80	110	2,04

PASO 8. Obtenga la gráfica de estabilización que evidencia que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que simulando 85 averías con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del coste por hora de funcionamiento.

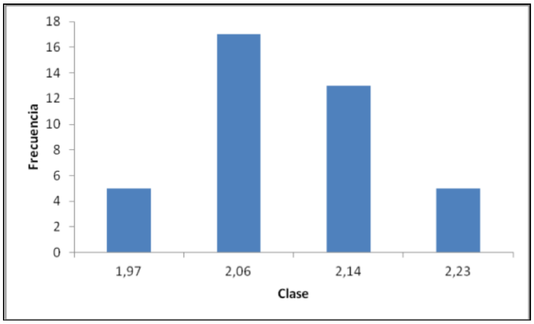
Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.



PASO 9. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del coste por hora de funcionamiento:

2,00	2,15	2,18	2,02	2,16
2,07	2,06	2,14	2,23	2,18
2,18	2,20	2,00	2,02	2,06
2,07	2,16	2,10	2,05	2,03
2,02	2,16	2,13	2,29	2,17
2,11	2,08	2,09	2,06	2,02
1,97	2,15	2,00	2,10	2,00
2,05	2,03	2,21	2,21	2,11



PASO 10. Calcule el coste por hora de funcionamiento y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 2{,}10\,\frac{\text{euros}}{\text{hora}} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}07749\,\frac{\text{euros}}{\text{hora}}$$

PASO 11. Halle el intervalo de confianza del coste por hora de funcionamiento con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$1{,}95 \leq \mu \leq 2{,}25$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el coste por hora de funcionamiento en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 1,95 y 2,25 euros por hora de funcionamiento.

Sustitución de la torre de cinco herramientas

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Las horas entre averías.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos históricos.

Horas entre averías	30	40	50	60	70	80	90
Probabilidad	0,05	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

Horas entre averías	30	40	50	60	70	80	90
f(x)	0,05	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10
F(x)	0,05	0,20	0,35	0,55	0,75	0,90	1,00

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

Horas entre averías	30	40	50	60	70	80	90
f(x)	0,05	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	0,10
F(x)	0,05	0,20	0,35	0,55	0,75	0,90	1,00
Intervalos	0,00 a 0,04	0,05 a 0,19	0,20 a 0,34	0,35 a 0,54	0,55 a 0,74	0,75 a 0,89	0,90 a 1,00

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

0,47	0,48	0,15	0,67	0,94

PASO 6. Simule una avería y calcule el coste de reemplazar la herramienta.

Avería nº	Número aleatorio	Horas entre averías	Coste reemplazo	Coste por hora de funcionamiento
1	0,47	60	250	4,17

Coste reemplazo = coste máquina parada + coste herramienta

Coste máquina parada = 100 euros/hora x 2 horas = 200 euros

Coste herramientas = 10 euros/herramienta x 5 herramientas = 50 euros

Coste reemplazo = 200 + 50 = 250 euros

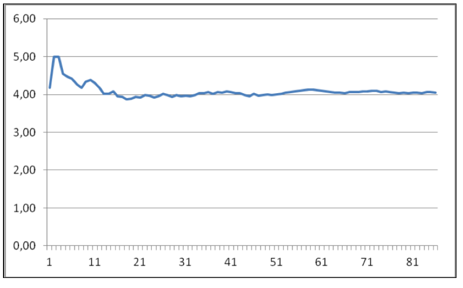
$$\text{Coste por hora de funcionamiento} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{Coste reemplazo}_i}{\sum_{i=1}^{n} \text{Horas entre averías}_i} = \frac{250}{60} = 24{,}17\frac{\text{euros}}{\text{hora}}$$

PASO 7. Repita el PASO 6 con los números aleatorios generados en el PASO 5.

Avería nº	Número aleatorio	Horas entre averías	Coste reemplazo	Coste por hora de funcionamiento
1	0,47	60	250	4,17
2	0,48	60	250	4,17
3	0,15	40	250	4,69
4	0,67	70	250	4,35
5	0,94	90	250	3,91

PASO 8. Obtenga la gráfica de estabilización que indica que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que simulando 85 averías con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del coste por hora de funcionamiento.

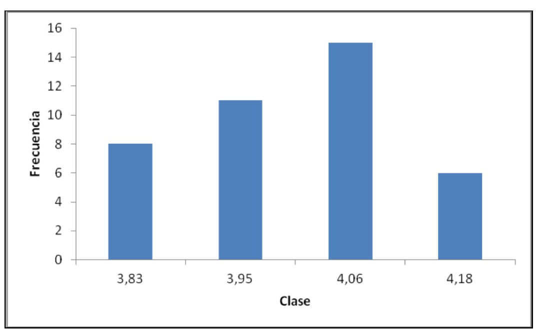


Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 9. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del coste por hora de funcionamiento:

4,01	3,99	4,10	4,05	3,86
3,87	3,98	4,23	4,05	4,04
4,05	4,10	4,08	3,88	4,03
3,94	3,83	3,93	3,84	3,91
3,97	3,92	4,20	4,15	3,93
4,02	3,85	3,97	4,06	3,91
4,11	3,79	3,88	4,02	4,13
4,16	4,03	4,11	4,16	3,92



PASO 10. Calcule el coste por hora de funcionamiento y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 4{,}00\,\frac{\text{euros}}{\text{hora}} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}11100\,\frac{\text{euros}}{\text{hora}}$$

PASO 11. Halle el intervalo de confianza del coste por hora de funcionamiento con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$3{,}78 \leq \mu \leq 4{,}22$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el coste por hora de funcionamiento en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 3,78 y 4,22 euros por hora de funcionamiento.

La política de mantenimiento óptima es la que se está llevando a cabo de reemplazar una herramienta cuando se deteriora.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO de la sustitución de una herramienta

	A	B	C	D	E	F
1	**Horas entre averías**	**f(x)**	**F(x)**	**Límite inferior intervalo**	**Límite superior intervalo**	**Horas entre averías**
2	20	0,05	0,05	0,00	0,04	20
3	30	0,15	0,20	0,05	0,19	30
4	40	0,15	0,35	0,20	0,34	40
5	50	0,20	0,55	0,35	0,54	50
6	60	0,20	0,75	0,55	0,74	60
7	70	0,15	0,90	0,75	0,89	70
8	80	0,10	1,00	0,90	1,00	80
9						
10						
11	Coste hora máquina parada			100	euros	
12	Coste de una herramienta			10	euros	
13	ESCENARIO			Sustituir solo una herramienta		
14	**Avería Nº**	**Número aleatorio**	**Horas entre averías**	**Coste reemplazo**	**Coste por hora de funcionamie nto**	
15	1	0,47	50	110	2,20	
16	2	0,48	50	110	2,20	
17	3	0,15	30	110	2,54	
18	4	0,67	60	110	2,32	
19	5	0,94	80	110	2,04	

<u>Número aleatorio</u>

Casilla B15 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Horas entre averías</u>

Casilla C15 → BUSCARV(B15;$D$2:$F$8;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → BUSCARV(ALEATORIO();$D$2:$F$8;3)

<u>Coste reemplazo</u>

Casilla D15 → ($D$11*1)+($D$12*1)

<u>Coste por hora de funcionamiento</u>

Casilla E15 → SUMA($D$15:D15)/ SUMA($C$15:C15))

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar, en este caso simular cinco averías.

2. **Resuelva el caso sin el uso de la simulación y compare los resultados. Indique si esto afecta o no a la decisión tomada utilizando la simulación.**

Coste por hora de funcionamiento sí solo sustituye una herramienta.

Horas entre averías	**Probabilidad**	
X_i	**$P(X_i)$**	**$X_i \cdot P(X_i)$**
20	0,05	1,0
30	0,15	4,5
40	0,15	6,0
50	0,20	10,0
60	0,20	12,0
70	0,15	10,5
80	0,10	8,0
Total		**52**

$$\frac{1}{52}\frac{\text{avería}}{\text{horas}} \times \frac{110}{1}\frac{\text{euros}}{\text{avería}} = 2{,}12\frac{\text{euros}}{\text{hora}}$$

Coste por hora de funcionamiento sí sustituye cinco herramientas:

Horas entre averías	Probabilidad	
X_i	**$P(X_i)$**	**$X_i \cdot P(X_i)$**
30	0,05	1,5
40	0,15	6,0
50	0,15	7,5
60	0,20	1,2
70	0,15	10,5
80	0,10	8,0
90	0,10	9,0
Total		**51,2**

$$\frac{1}{51{,}2}\,\frac{\text{avería}}{\text{horas}} \times \frac{250}{1}\,\frac{\text{euros}}{\text{avería}} = 4{,}88\,\frac{\text{euros}}{\text{hora}}$$

La política de mantenimiento óptima es la que se está llevando a cabo de reemplazar una herramienta cuando se deteriora. No varía la decisión tomada mediante simulación.

1.3 CASO Ventas de temporada

El director de producción de una pequeña empresa debe decidir cuántas unidades producir la próxima temporada. Basándose en la experiencia y en las ventas de los últimos años, quince vendedores de la empresa han estimado de forma independiente la demanda para la próxima temporada. Dichas previsiones en miles de unidades se recogen en la tabla siguiente.

Vendedor	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Unidades	15	10	15	20	10	15	15	10	15	10	10	15	15	10	10

Las ventas de la empresa pueden representarse mediante una distribución normal. Los gastos fijos y variables de producción son de 6.000 euros y 3 euros cada unidad, respectivamente. El precio de venta unitario es de 50 euros. Todo producto que no se vende durante la temporada genera unos costes de manipulación y reciclaje de 60 euros. Por su parte, las ventas no satisfechas se pierden, estimándose el coste asociado a las mismas en 50 euros por unidad.

1. **Determine el número de unidades a producir con el objetivo de maximizar el beneficio.**
2. **En el caso de que los gastos fijos fueran de 5.000 euros hasta un nivel de producción de 10.000 unidades, y de 7.000 euros para límites de producción superiores, indique si modificaría su decisión anterior.**

SOLUCIÓN

1. Determine el número de unidades a producir con el objetivo de maximizar el beneficio.

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

La demanda de la próxima temporada.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de la variable a partir de las previsiones de los vendedores.

Demanda	f	Demanda · f	Demanda² · f
5.000	0	0	0
10.000	7	70.000	700.000.000
15.000	7	105.000	1.575.000.000
20.000	1	20.000	400.000.000
Total	**15**	**195.000**	**2.675.000.000**

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{195.000}{15} = 13.000 \text{ unidades}$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot = \left(\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f} - \bar{x}^2 \right) = \frac{15}{14} \times \left(\frac{2.675.000.000}{15} - (13.000)^2 \right) = 10.000.000$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.000.000} = 3.162 \text{ unidades}$$

La demanda prevista para la próxima temporada sigue una distribución normal de media 13.000 unidades y desviación estándar 3.162 unidades.

PASO 3. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

0,93	0,26	0,47	0,25	0,99

PASO 4. Simule el beneficio obtenido para un determinado escenario. El escenario elegido es el de fabricar 15.000 unidades la próxima temporada.

PRODUCIR 15.000 UNIDADES

Número aleatorio	Z	Demanda	Ingresos ventas	Costes reciclaje	Beneficio	Beneficio promedio
0,93	1,48	17.680	750.000	0	565.000	565.000

Coste variable de producción = 15000 unidades x 3 euros/unidad = 45.000 euros

Coste fijo de producción = 6.000 euros

Z lo obtiene en las tablas de la distribución normal estándar N(0, 1)

$$\text{Demanda} = \bar{x} + z \cdot \sigma = 13000 + z \cdot 3162$$

<u>Si producción > demanda</u>

Ingresos ventas = Demanda x Precio unitario de venta.

Costes reciclaje = (Producción - Demanda) x Coste unitario de reciclaje.

Coste ventas perdidas = 0.

<u>Si producción ≤ demanda</u>

Ingresos ventas = Producción x Precio unitario de venta.

Costes reciclaje = 0.

Coste ventas perdidas = (Demanda - Producción) x Coste unitario ventas perdidas.

<u>Beneficio</u> = Ingresos ventas - Costes reciclaje - Coste variable de producción - Coste fijo de producción - Coste ventas perdidas.

PASO 5. Repita el PASO 4 con los números aleatorios generados en el PASO 3.

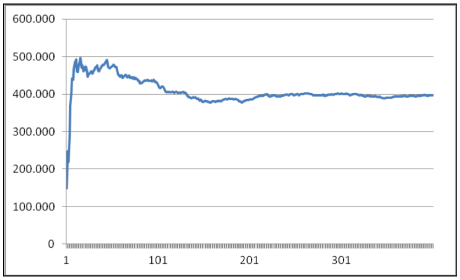
PRODUCIR 15.000 UNIDADES

Número aleatorio	Z	Demanda	Ingresos ventas	Costes reciclaje	Beneficio	Beneficio promedio
0,93	1,48	17.680	750.000	0	565.000	565.000
0,26	-0,64	10.976	548.800	241.440	256.360	410.680
0,47	-0,08	12.747	637.350	135.180	451.170	424.177
0,25	-0,67	10.881	544.050	247.140	245.910	379.610
0,99	2,33	20.367	750.000	0	430.650	389.818

Coste variable de producción = 15000 unidades x 3 euros/unidad = 45.000 euros
Coste fijo de producción = 6.000 euros

PASO 6. Obtenga la gráfica de estabilización que evidencia que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que realizando 400 simulaciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del beneficio promedio.

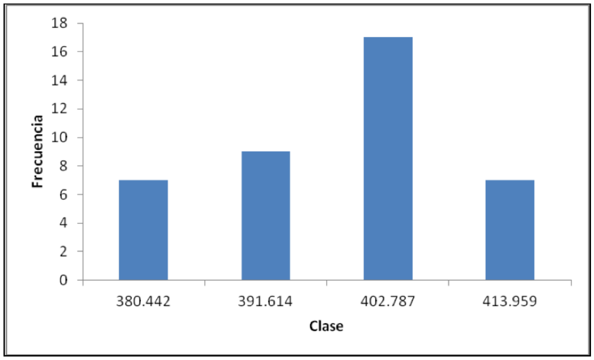


Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 7. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio promedio:

396.731	404.388	406.884	377.901	398.022
384.023	413.912	398.034	398.016	386.690
389.731	408.765	400.900	396.293	404.847
389.249	382.714	386.780	408.443	398.125
398.320	391.118	407.513	405.362	411.694
404.400	415.854	400.519	404.649	402.390
391.882	369.742	400.572	387.929	380.661
382.334	400.834	379.419	409.813	412.564



PASO 8. Calcule el beneficio promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 397.200 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 11.172{,}43 \text{ euros}$$

PASO 9. Halle el intervalo de confianza del beneficio promedio con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$375.302 \leq \mu \leq 419.098$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 375.302 y 419.098 euros.

PASO 10. Simule el beneficio obtenido con otro escenario. El escenario elegido en este caso es el de producir 19.000 unidades la próxima temporada.

PRODUCIR 19.000 UNIDADES

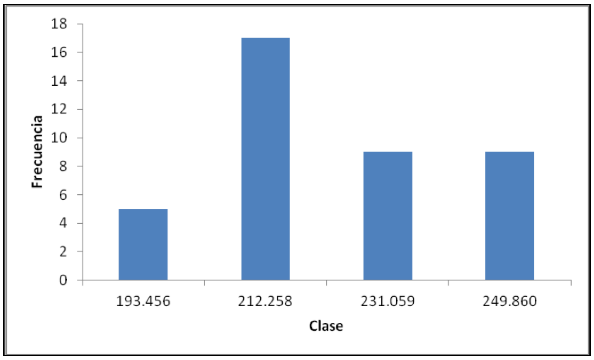
Número aleatorio	Z	Demanda	Ingresos ventas	Costes reciclaje	Beneficio	Beneficio promedio
0,93	1,48	17.680	884.000	79.200	741.800	741.800
0,26	-0,64	10.976	548.800	481.440	4.360	373.080
0,47	-0,08	12.747	637.350	375.180	199.170	315.110
0,25	-0,67	10.881	544.050	487.140	-6.090	234.810
0,99	2,33	20.367	950.000	0	818.650	351.578

Coste variable de producción = 19000 unidades x 3 euros/unidad = 57.000 euros
Coste fijo de producción = 6.000 euros

PASO 11. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio promedio:

208.820	204.958	217.570	225.522	216.528
206.251	237.152	204.936	220.122	236.409
244.343	193.837	211.315	215.679	210.840
232.890	243.294	200.499	202.904	209.396
243.507	230.850	199.564	208.351	174.755
227.541	247.274	250.223	217.857	198.557
231.403	230.850	250.488	250.142	247.871
221.805	216.119	252.459	216.585	206.862



PASO 12. Calcule el beneficio promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 221.658 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 18.801{,}31 \text{ euros}$$

PASO 13. Halle el intervalo de confianza del beneficio con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$184.808 \leq \mu \leq 258.509$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 184.808 y 258.509 euros.

PASO 14. Simule el beneficio obtenido con otro escenario. En este caso el escenario elegido es el de producir 14.000 unidades la próxima temporada.

PRODUCIR 14.000 UNIDADES

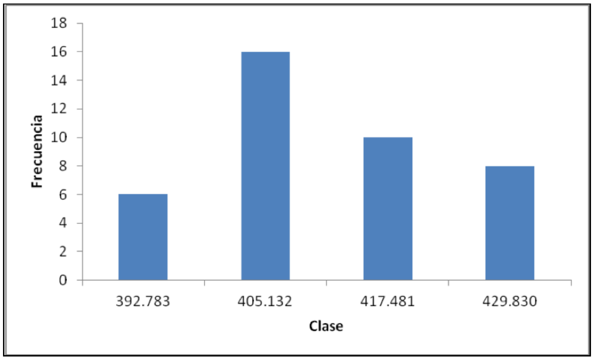
Número aleatorio	Z	Demanda	Ingresos ventas	Costes reciclaje	Beneficio	Beneficio promedio
0,93	1,48	17.680	700.000	0	468.000	468.000
0,26	-0,64	10.976	548.800	181.440	319.360	393.680
0,47	-0,08	12.747	637.350	75.180	514.170	433.843
0,25	-0,67	10.881	544.050	187.140	308.910	402.610
0,99	2,33	20.367	700.000	0	333.650	388.818

Coste variable de producción = 14000 unidades x 3 euros/unidad = 42.000 euros
Coste fijo de producción = 6.000 euros

PASO 15. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio promedio:

410.965	429.813	398.866	403.878	425.875
400.897	406.175	406.817	418.362	423.067
428.529	409.740	404.788	415.874	407.755
396.115	431.002	403.079	389.859	409.433
404.264	428.160	392.248	424.930	429.402
385.370	417.097	400.529	414.688	405.307
433.623	402.030	410.251	413.763	422.325
422.872	412.120	405.578	392.672	414.131



PASO 16. Calcule el beneficio promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 411.306 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 12.349{,}07 \text{ euros}$$

PASO 17. Halle el intervalo de confianza del beneficio con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$387.102 \leq \mu \leq 435.510$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 387.102 y 435.510 euros.

Tomando en consideración los tres escenarios analizados, el máximo beneficio se alcanza produciendo 14.000 unidades.

2. En el caso de que los gastos fijos fueran de 5.000 euros hasta un nivel de producción de 10.000 unidades, y de 7.000 euros para límites de producción superiores, indique si modificaría su decisión anterior.

PASO 1. Tomando en consideración los nuevos costes fijos, simule el beneficio logrado con el escenario correspondiente a fabricar 9.000 unidades la próxima temporada.

PRODUCIR 9.000 UNIDADES

Número aleatorio	Z	Demanda	Ingresos ventas	Costes reciclaje	Beneficio	Beneficio promedio
0,93	1,48	17.680	450.000	0	-16.000	-16.000
0,26	-0,64	10.976	450.000	0	319.200	151.600
0,47	-0,08	12.747	450.000	0	230.650	177.950
0,25	-0,67	10.881	450.000	0	323.950	214.450
0,99	2,33	20.367	450.000	0	-150.350	141.490

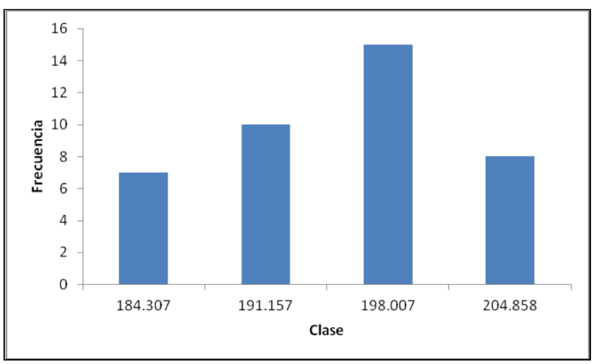
Coste variable de producción = 9000 unidades x 3 euros/unidad = 27.000 euros

Coste fijo de producción = 5.000 euros

PASO 2. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio promedio:

198.832	198.985	201.705	192.926	196.848
196.760	194.921	198.280	188.576	185.998
182.050	184.274	206.694	192.682	201.825
189.751	204.722	182.319	183.940	198.882
188.037	198.683	196.105	202.281	191.144
196.272	191.114	201.907	181.592	187.390
190.613	191.415	196.548	201.701	207.711
195.743	200.689	192.260	197.876	193.235



PASO 3. Calcule el beneficio promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 194.582 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 6.850{,}39 \text{ euros}$$

PASO 4. Halle el intervalo de confianza del beneficio con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$181.155 \leq \mu \leq 208.009$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 181.155 y 208.009 euros.

PASO 5. Simule el beneficio obtenido con otro escenario. El escenario elegido en este caso es el de producir 14.000 unidades la próxima temporada.

PRODUCIR 14.000 UNIDADES

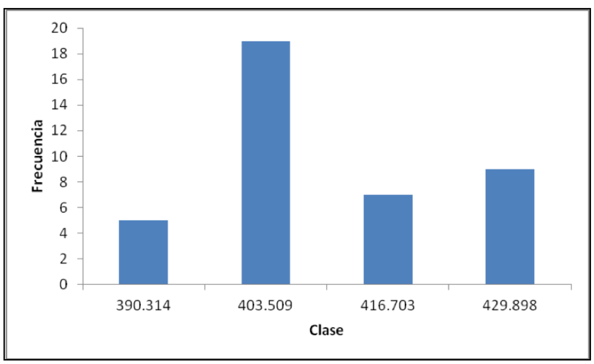
Número aleatorio	Z	Demanda	Ingresos ventas	Costes reciclaje	Beneficio	Beneficio promedio
0,93	1,48	17.680	700.000	0	467.000	467.000
0,26	-0,64	10.976	548.800	181.440	318.360	392.680
0,47	-0,08	12.747	637.350	75.180	513.170	432.843
0,25	-0,67	10.881	544.050	187.140	307.910	401.610
0,99	2,33	20.367	700.000	0	332.650	387.818

Coste variable de producción = 14000 unidades x 3 euros/unidad = 42.000 euros
Coste fijo de producción = 7.000 euros

PASO 6. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio promedio:

409.965	428.813	397.866	402.878	424.875
399.897	404.741	405.817	417.362	422.067
427.529	408.740	403.788	414.874	406.755
395.115	430.002	402.079	388.859	408.433
403.264	427.160	391.248	431.481	413.275
436.596	385.352	406.347	399.203	406.768
433.226	413.574	426.446	409.546	401.174
411.837	409.314	398.071	387.978	411.916



PASO 7. Calcule el beneficio promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 410.106 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 13.194{,}51 \text{ euros}$$

PASO 8. Halle el intervalo de confianza del beneficio con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$384.245 \leq \mu \leq 435.967$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 384.245 y 435.967 euros.

Tomando en consideración los dos escenarios estudiados, el máximo beneficio se obtiene fabricando 14.000 unidades. La decisión anterior no se ve modificada.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO de producir 15.000 unidades

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Media**		13.000	**Coste ventas perdidas ud.**			50
2	**Desviación**		3.162	**Coste Fijo**			6.000
3	**Ingreso por unidad**		50	**Coste Variable unitario**			3
4	**Coste unitario reciclaje**		60	**Producción**			15.000
5	**ESCENARIO**			**Producir 15.000 unidades**			
6	**Número aleatorio**	**Z**	**Demanda**	**Ingresos ventas**	**Costes reciclaje**	**Beneficio**	**Beneficio promedio**
7	0,93	1,48	17.680	750.000	0	565.000	565.000
8	0,26	-0,64	10.976	548.800	241.440	256.360	410.680
9	0,47	-0,08	12.747	637.350	135.180	451.170	424.177
10	0,25	-0,67	10.881	544.050	247.140	245.910	379.610
11	0,99	2,33	20.367	750.000	0	430.650	389.818

<u>Número aleatorio</u>

Casilla A7 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Z</u>

Casilla B7 → REDONDEAR(DISTR.NORM.ESTAND.INV(A7);2)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola → REDONDEAR(DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO());2)

Demanda

Casilla C7 → REDONDEAR(($C$1+(B7*$C$2));0)

Las tres casillas anteriores pueden juntarse en una sola → REDONDEAR(DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();$C$1;$C$2);0)

Ingresos ventas

Casilla D7 → SI($G$4>C7;C7*$C$3;$G$4*$C$3)

Costes reciclaje

Casilla E7 → SI($G$4>C7;($G$4-C7)*$C$4;0)

Beneficio

Casilla F7 → D7-E7-SI($G$4>C7;0;(C7-$G$4)*$G$1)-$G$2-($G$3*$G$4)

Beneficio promedio

Casilla G7 → PROMEDIO($F$7:F7)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar, en este caso cinco.

1.4 CASO Políticas de gestión de stocks

La demanda diaria de un producto sigue una distribución Binomial con parámetros p = 0,6 y n = 5, y el plazo de entrega en días una distribución Poisson con λ = 1. El coste de mantener una unidad en el stock es de 5 euros por día, el coste de rotura 10 euros por unidad y el coste de lanzamiento 100 euros por orden. La rotura de stock en un ciclo es provista por la orden que llega en el próximo ciclo. Compare las siguientes políticas de gestión del stock del producto:

1. **Ordenar cada 5 días hasta tener 20 unidades en stock.**
2. **Ordenar hasta 20 productos cuando el nivel de stock sea menor o igual a 5 unidades.**

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

La demanda diaria del producto.

El plazo de entrega del producto.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos.

Sabiendo que la distribución de probabilidad de la demanda diaria del producto sigue una distribución binomial con parámetros p = 0,6 y n = 5, y conocida la expresión analítica de la función de densidad de probabilidad de la distribución binomial:

$$f(x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Demanda	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
f(x)	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

Por su parte, el plazo de entrega en días sigue una distribución Poisson con λ = 1. Siendo la expresión analítica de la función de densidad de probabilidad de la distribución Poisson:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Plazo entrega	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003	0,001

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

Demanda	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078
F(x)	0,010	0,087	0,317	0,663	0,922	1,000

Plazo entrega	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003	0,001
F(x)	0,368	0,736	0,920	0,981	0,996	0,999	1,000

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

Demanda	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078
F(x)	0,010	0,087	0,317	0,663	0,922	1,000
Intervalos	0,000 0,009	0,010 0,086	0,087 0,316	0,317 0,662	0,663 0,921	0,922 1,000

Plazo entrega	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003	0,001
F(x)	0,368	0,736	0,920	0,981	0,996	0,999	1,000
Intervalos	0,000 0,367	0,368 0,735	0,736 0,919	0,920 0,980	0,981 0,995	0,996 0,998	0,999 1,000

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Demanda	0,82	0,74	0,97	0,37	0,45	0,31	0,94	0,99	0,42	0,49
Plazo entrega	0,95	0,13	0,44	0,34	0,62	0,64	0,39	0,55	0,29	0,30

PASO 6. Simule la primera de las políticas de gestión del stock consistente en ordenar cada cinco días hasta tener veinte unidades en stock y calcule el coste de dicha política.

Ordenar cada 5 días hasta tener 20 unidades en stock

Día	R	D	Dip	PP	SI	SF	Q	R	PE	QR	CL	CM	CR	CT	CP
0	0,82	4	0		0	-4	24	0,95	3		100	0	40	140	140

R	$\rightarrow$	Número aleatorio	PE	$\rightarrow$	Plazo de entrega
D	$\rightarrow$	Demanda	QR	$\rightarrow$	Cantidad recibida
Dip	$\rightarrow$	Stock disponible al inicio del día	CL	$\rightarrow$	Coste de lanzamiento
PP	$\rightarrow$	Pedido pendiente de recepción	CM	$\rightarrow$	Coste de mantenimiento
SI	$\rightarrow$	Stock al inicio del día	CR	$\rightarrow$	Coste de rotura
SF	$\rightarrow$	Stock al final del día	CT	$\rightarrow$	Coste total
Q	$\rightarrow$	Cantidad pedida	CP	$\rightarrow$	Coste promedio

$$Dip_t = Dip_{t-1} - D_{t-1} + QR_t$$

$$SI_t = Dip_t + PP_t \qquad\qquad SF_t = SI_t - D_t$$

<u>Si SF ≤ 0</u>

Coste de mantenimiento = 0.

Coste de rotura = SF x Coste unitario de rotura.

<u>Si SF > 0</u>

Coste de mantenimiento = SF x Coste unitario de mantenimiento.

Coste de rotura = 0.

PASO 7. Repita el PASO 6 con los números aleatorios generados en el PASO 5.

Ordenar cada 5 días hasta tener 20 unidades en stock

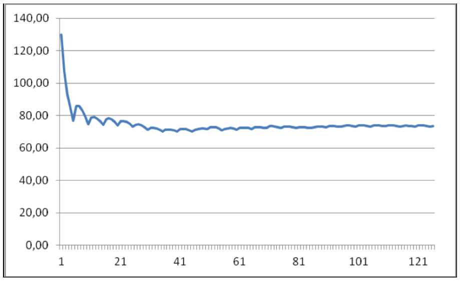
Día	R	D	Dip	PP	SI	SF	Q	R	PE	QR	CL	CM	CR	CT	CP
0	0,82	4	0		0	-4	24	0,95	3	0	100	0	40	140	140,00
1	0,74	4	-4	24	20	16		0,13		0	0	80	0	80	110,00
2	0,97	5	-8	24	16	11		0,44		0	0	55	0	55	91,67
3	0,37	3	-13	24	11	8		0,34		0	0	40	0	40	78,75
4	0,45	3	8		8	5		0,62		24	0	25	0	25	68,00
5	0,31	2	5		5	3	17	0,64	1	0	100	15	0	115	75,83
6	0,94	5	3	17	20	15		0,39		0	0	75	0	75	75,71
7	0,99	5	15		15	10		0,55		17	0	50	0	50	72,50
8	0,42	3	10		10	7		0,29		0	0	35	0	35	68,33
9	0,49	3	7		7	4		0,30		0	0	20	0	20	63,50

$$Dip_t = Dip_{t-1} - D_{t-1} + QR_t$$

$$SI_t = Dip_t + PP_t \qquad\qquad SF_t = SI_t - D_t$$

PASO 8. Obtenga la gráfica de estabilización que indica que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que realizando 125 simulaciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del coste promedio.

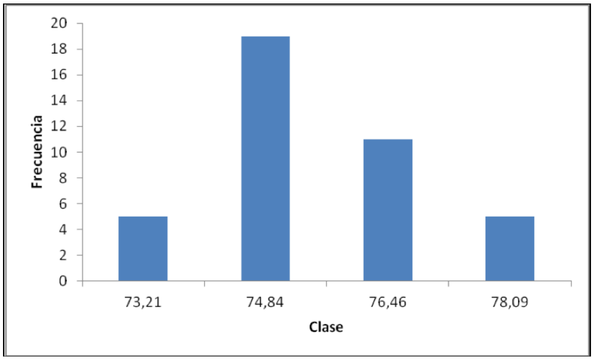


Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 9. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del coste promedio:

73,49	76,87	75,44	74,92	75,44
74,72	76,87	73,81	75,00	77,86
75,44	74,64	73,53	74,21	75,20
78,17	76,90	76,07	74,37	77,14
77,66	75,20	74,88	77,02	74,80
76,19	75,08	80,67	75,83	75,60
73,41	75,83	74,33	72,10	74,80
78,69	75,44	77,10	75,24	76,07



PASO 10. Calcule el coste promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 75{,}65 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 1{,}623 \text{ euros}$$

PASO 11. Halle el intervalo de confianza del coste con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$72{,}47 \leq \mu \leq 78{,}83$$

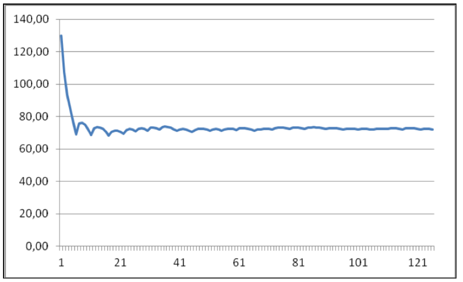
Si realiza cien repeticiones del modelo, el coste promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 72,47 y 78,83 euros.

PASO 12. Simule la segunda política de gestión del stock fundamentada en ordenar hasta veinte productos cuando el nivel del stock sea menor o igual a cinco unidades y calcule su coste.

Ordenar hasta 20 productos cuando el nivel del stock sea ≤5

Día	R	D	Dip	PP	SI	SF	Q	R	PE	QR	CL	CM	CR	CT	CP
0	0,82	4	0		0	-4	24	0,95	3	0	100	0	40	140	140,00
1	0,74	4	-4	24	20	16		0,13		0	0	80	0	80	110,00
2	0,97	5	-8	24	16	11		0,44		0	0	55	0	55	91,67
3	0,37	3	-13	24	11	8		0,34		0	0	40	0	40	78,75
4	0,45	3	8		8	5	15	0,62	1	24	100	25	0	125	88,00
5	0,31	2	5	15	20	18		0,64		0	0	90	0	90	88,33
6	0,94	5	18		18	13		0,39		15	0	65	0	65	85,00
7	0,99	5	13		13	8		0,55		0	0	40	0	40	79,38
8	0,42	3	8		8	5	15	0,29	0	0	100	25	0	125	84,44
9	0,49	3	20		20	17		0,30		15	0	85	0	85	84,50

PASO 13. Obtenga la gráfica de estabilización que muestra que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.



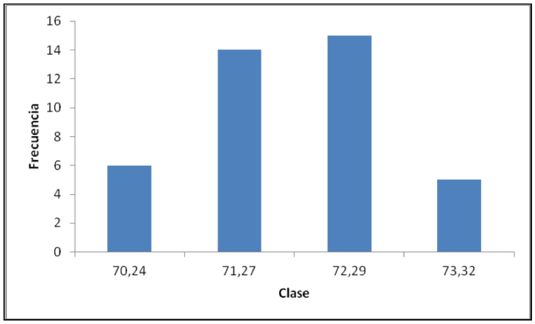
Vea en la gráfica que realizando 125 simulaciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del coste promedio.

Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 14. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del coste promedio:

72,18	71,19	72,34	74,44	72,02
70,52	71,23	72,46	69,72	69,56
70,20	71,59	71,39	70,12	71,83
72,34	70,75	70,67	71,63	71,83
73,77	72,42	73,10	72,46	71,15
71,83	72,70	72,14	71,67	71,71
72,98	71,75	72,02	72,82	72,74
71,55	71,15	70,99	72,46	71,59



PASO 15. Calcule el coste promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 71{,}78 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 1{,}0202 \text{ euros}$$

PASO 16. Halle el intervalo de confianza del coste con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$69{,}78 \leq \mu \leq 73{,}77$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el coste promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 69,78 y 73,77 euros.

Tomando en consideración las simulaciones llevadas a cabo de cada una de las políticas de gestión del stock, el mínimo coste de gestión del stock se consigue ordenando hasta 20 productos cuando el nivel del stock sea ≤ 5.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO de ordenar cada cinco días hasta tener veinte unidades en stock

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	D	f(x)	F(x)	LI	LS	D					PE	f(x)	F(x)	LI	LS	PE
2	0	0,010	0,010	0,000	0,009	0					0	0,368	0,368	0,000	0,367	0
3	1	0,077	0,087	0,010	0,086	1					1	0,368	0,736	0,368	0,735	1
4	2	0,230	0,317	0,087	0,316	2					2	0,184	0,920	0,736	0,919	2
5	3	0,346	0,663	0,317	0,662	3					3	0,061	0,981	0,920	0,980	3
6	4	0,259	0,922	0,663	0,921	4					4	0,015	0,996	0,981	0,995	4
7	5	0,078	1,000	0,922	1,000	5					5	0,003	0,999	0,996	0,998	5
8											6	0,001	1,000	0,999	1,000	6
9	PEDIR cada		5	Días	Coste Mantenimiento				5	euro		Coste Rotura		10	euros	
10												**COSTES**				
11	**Día**	**R**	**D**	**Dip**	**PP**	**SI**	**SF**	**Q**	**R**	**PE**	**QR**	**CL**	**CM**	**CR**	**CT**	**CP**
12	0	0,82	4	0		0	-4	24	0,95	3	0	100	0	40	140	140
13	1	0,74	4	-4	24	20	16		0,13		0	0	80	0	80	110
14	2	0,97	5	-8	24	16	11		0,44		0	0	55	0	55	91,7
15	3	0,37	3	-13	24	11	8		0,34		0	0	40	0	40	78,8
16	4	0,45	3	8		8	5		0,62		24	0	25	0	25	68,0
17	5	0,31	2	5		5	3	17	0,64	1	0	100	15	0	115	75,8
18	6	0,94	5	3	17	20	15		0,39		0	0	75	0	75	75,7
19	7	0,99	5	15		15	10		0,55		17	0	50	0	50	72,5
20	8	0,42	3	10		10	7		0,29		0	0	35	0	35	68,3
21	9	0,49	3	7		7	4		0,30		0	0	20	0	20	63,5

LI → Límite Inferior intervalo

LS → Límite Superior intervalo

f(x) de la demanda

Casilla B2 → DISTR.BINOM(A2;5;0,6;FALSO)

F(x) de la demanda

Casilla C2 → SUMA($B$2:B2)

f(x) del plazo de entrega

Casilla L2 → POISSON(K2;1;FALSO)

F(x) del plazo de entrega

Casilla M2 → SUMA($L$2:L2)

Número aleatorio (R)

Casilla B12 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Demanda (D)

Casilla C12 → BUSCARV(B12;$D$2:$F$7;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → BUSCARV(ALEATORIO();$D$2:$F$7;3)

Stock disponible al inicio del día (Dip)

Casilla D13 → D12-C12+K13

<u>Stock al inicio del día (SI)</u>

Casilla F12 → D12+E12

<u>Stock al final del día (SF)</u>

Casilla G12 → F12-C12

<u>Cantidad pedida (Q)</u>

Casilla H12 → SI(RESIDUO(A12;$C$9)=0;20-G12;0)

<u>Número aleatorio (R)</u>

Casilla I12 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Plazo de entrega (PE)</u>

Casilla J12 → SI(H12>0;BUSCARV(I12;$N$2:$P$8;3);"")

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula

SI(H12>0;BUSCARV(REDONDEAR(ALEATORIO();2);$N$2:$P$8;3);0)

<u>Coste de lanzamiento (CL)</u>

Casilla L12 → SI(RESIDUO(A12;$C$9)=0;100;0)

<u>Coste de mantenimiento (CM)</u>

Casilla M12 → SI(G12>0;$I$9*G12;0)

Coste de rotura (CR)

Casilla N12 → SI(G12>0;0;-$N$9*G12)

Coste total (CT)

Casilla O12 → SUMA(L12:N12)

Coste promedio (CP)

Casilla P12 → PROMEDIO($O$12:O12)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar, en este caso diez correspondientes a los diez días simulados.

1.5 CASO Empresa comercializadora

Una empresa dedicada a la comercialización de un producto de mucho éxito quiere determinar el número de unidades que debe comprar con el objetivo de satisfacer la demanda de sus clientes los próximos meses. La distribución de las ventas de los últimos tres años se recoge en la tabla siguiente.

Unidades vendidas	100	200	300	400	500	600
Frecuencia (meses)	8	9	4	9	4	2

El coste de cada unidad de producto asciende a 750 euros, siendo su precio de venta unitario de 1000 euros. Se sabe que dentro de un mes saldrá al mercado un nuevo modelo de características muy superiores al modelo actual. Cuando esto ocurra la empresa podrá devolver al distribuidor las unidades sobrantes del modelo actual y este le indemnizará con 250 euros por cada unidad retornada.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Las ventas mensuales del producto.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos.

Unidades vendidas	100	200	300	400	500	600
Frecuencia (meses)	8	9	4	9	4	2
f(x)	0,22	0,25	0,11	0,25	0,11	0,06

$$\text{Frecuencia relativa} = \frac{\text{Frecuencia absoluta}}{\text{Tamaño de la muestra}}$$

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de las ventas mensuales.

Unidades vendidas	100	200	300	400	500	600
Frecuencia (meses)	8	9	4	9	4	2
f(x)	0,22	0,25	0,11	0,25	0,11	0,06
F(x)	0,22	0,47	0,58	0,83	0,94	1,00

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de las ventas mensuales.

Unidades vendidas	100	200	300	400	500	600
Frecuencia (meses)	8	9	4	9	4	2
f(x)	0,22	0,25	0,11	0,25	0,11	0,06
F(x)	0,22	0,47	0,58	0,83	0,94	1,00
Intervalos	0,00 0,21	0,22 0,46	0,47 0,57	0,58 0,82	0,83 0,93	0,94 1,00

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

0,33	0,52	0,78	0,13	0,06	0,28	0,30	0,95	0,23	0,37

PASO 6. Simule las ventas mensuales y calcule el beneficio proporcionado por dichas ventas bajo un determinado escenario. El escenario elegido corresponde a un nivel de compra de 400 unidades.

COMPRAR 400 UNIDADES

Número aleatorio	Ventas simuladas	Devuelvo	Ingreso ventas	Ingreso devoluciones	Coste	Beneficio
0,33	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000

<u>Si compras > ventas</u>

Ingresos ventas = Ventas x Precio unitario de venta.

Devuelvo = Compras - Ventas.

Ingreso devoluciones = Ingreso unitario por devoluciones x Devuelvo.

<u>Si compras ≤ ventas</u>

Ingresos ventas = Compras x Precio unitario de venta.

Devuelvo = 0.

Ingreso devoluciones = 0.

<u>Coste</u> = Coste unitario de adquisición x Compras

<u>Beneficio</u> = Ingresos ventas + Ingreso devoluciones - Coste.

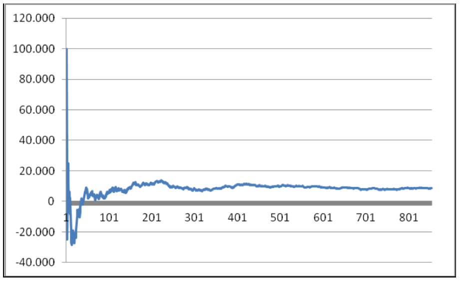
PASO 7. Repita el PASO 6 con los números aleatorios generados en el PASO 5, simulando los beneficios obtenidos hasta la aparición en el mercado del nuevo modelo.

COMPRAR 400 UNIDADES

Número aleatorio	Ventas simuladas	Devuelvo	Ingreso ventas	Ingreso devoluciones	Coste	Benefici o	Beneficio promedio
0,33	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-50.000
0,52	300	100	300.000	25.000	300.000	25.000	-12.500
0,78	400	0	400.000	0	300.000	100.000	25.000
0,13	100	300	100.000	75.000	300.000	-125.000	-12.500
0,06	100	300	100.000	75.000	300.000	-125.000	-35.000
0,28	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-37.500
0,30	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-39.286
0,95	600	0	400.000	0	300.000	100.000	-21.875
0,23	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-25.000
0,37	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-27.500

PASO 8. Obtenga la gráfica de estabilización que evidencia que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que realizando 850 simulaciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del beneficio promedio.

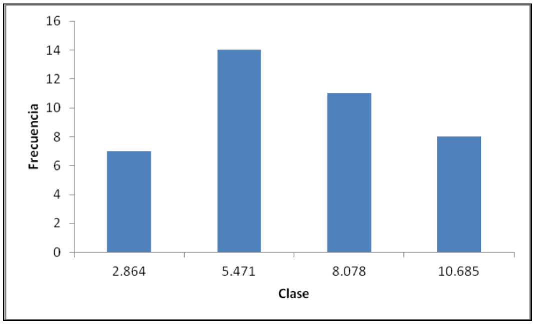


Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 9. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio promedio:

6.477	7.657	6.295	8.565	6.840
6.295	9.837	9.473	8.111	8.747
8.838	6.477	6.840	10.381	6.749
7.748	9.473	10.654	3.481	4.752
9.383	-333	5.660	6.114	6.568
9.019	4.933	3.753	2.573	5.478
2.845	7.476	10.926	8.565	3.935
4.479	3.935	5.932	11.562	4.479



PASO 10. Calcule el beneficio promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 6.774 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 2.606{,}958 \text{ euros}$$

PASO 11. Halle el intervalo de confianza del beneficio con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$1.665 \leq \mu \leq 11.884$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el coste promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 1.665 y 11.884 euros.

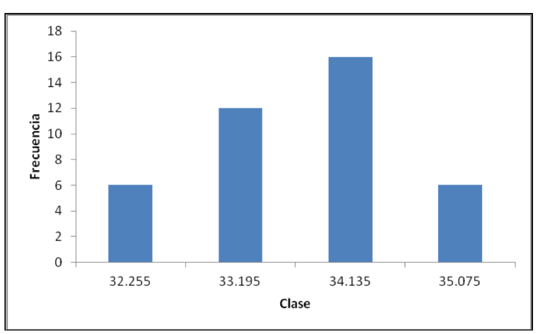
PASO 12. Simule el beneficio obtenido con otro escenario. El escenario elegido en este caso es el de comprar 200 unidades.

COMPRAR 200 UNIDADES

Número aleatorio	Ventas simuladas	Devuelvo	Ingreso ventas	Ingreso devoluciones	Coste	Benefici o	Beneficio promedio
0,33	200	0	200.000	0	150.000	50.000	50.000
0,52	300	0	200.000	0	150.000	50.000	50.000
0,78	400	0	200.000	0	150.000	50.000	50.000
0,13	100	100	100.000	25.000	150.000	-25.000	31.250
0,06	100	100	100.000	25.000	150.000	-25.000	20.000
0,28	200	0	200.000	0	150.000	50.000	25.000
0,30	200	0	200.000	0	150.000	50.000	28.571
0,95	600	0	200.000	0	150.000	50.000	31.250
0,23	200	0	200.000	0	150.000	50.000	33.333
0,37	200	0	200.000	0	150.000	50.000	35.000

PASO 13. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio promedio:



34.292	33.021	34.473	33.293	33.838
33.293	34.473	34.837	34.292	32.476
34.383	33.384	32.930	33.747	34.110
32.203	32.748	35.200	35.109	33.021
33.475	35.109	32.385	33.838	34.110
31.659	34.019	33.384	31.749	34.837
34.110	33.021	32.203	34.564	34.746
34.201	32.748	34.201	33.929	33.202

PASO 14. Calcule el beneficio promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 33.665 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 940{,}017 \text{ euros}$$

PASO 11. Halle el intervalo de confianza del beneficio con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$31.823 \leq \mu \leq 35.508$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio promedio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 31.823 y 35.508 euros.

A tenor de los escenarios simulados, el máximo beneficio se logra comprando doscientas unidades para satisfacer la demanda del próximo mes.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO correspondiente al escenario de comprar 400 unidades

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ventas	f(x)	F(x)	LI	LS	Ventas		
2	100	0,22	0,22	0,00	0,21	100		
3	200	0,25	0,47	0,22	0,46	200		
4	300	0,11	0,58	0,47	0,57	300		
5	400	0,25	0,83	0,58	0,82	400		
6	500	0,11	0,94	0,83	0,93	500		
7	600	0,06	1,00	0,94	1,00	600		
8	Ingreso por unidad vendida			1000	euros			
9	Ingreso por unidad devuelta			250	euros			
10	Coste unidad comprada			750	euros			
11	ESCENARIO Comprar			400	unidades			
12	R	VS	DEV	Ingreso ventas	IDEV	Coste	Beneficio	Beneficio promedio
13	0,33	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-50.000
14	0,52	300	100	300.000	25.000	300.000	25.000	-12.500
15	0,78	400	0	400.000	0	300.000	100.000	25.000
16	0,13	100	300	100.000	75.000	300.000	-125.000	-12.500
17	0,06	100	300	100.000	75.000	300.000	-125.000	-35.000
18	0,28	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-37.500
19	0,30	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-39.286
20	0,95	600	0	400.000	0	300.000	100.000	-21.875
21	0,23	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-25.000
22	0,37	200	200	200.000	50.000	300.000	-50.000	-27.500

LI	→	Límite Inferior intervalo	VS	→	Ventas simuladas
LS	→	Límite Superior intervalo	DEV	→	Devuelvo
R	→	Número aleatorio	IDEV	→	Ingreso devolución

Número aleatorio (R)

Casilla A13 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Ventas simuladas (VS)

Casilla B13 → BUSCARV(A13;$D$2:$F$7;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → BUSCARV(ALEATORIO();$D$2:$F$7;3)

Devuelvo (DEV)

Casilla C13 → SI($D$11>B13;$D$11-B13;0)

Ingreso ventas

Casilla D13 → SI($D$11>B13;$D$8*B13;$D$8*$D$11)

Ingreso devolución (IDEV)

Casilla E13 → SI($D$11>B13;$D$9*C13;0)

Coste

Casilla F13 → $D$10*$D$11

Beneficio

Casilla G13 → D13+E13-F13

Beneficio promedio

Casilla H13 → PROMEDIO($G$13:G13)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar, en este caso diez.

1.6 CASO Estación de ensamblado

El tiempo entre llegadas de piezas a una estación de ensamblado sigue una distribución exponencial con media 2 minutos. La duración de la tarea llevada a cabo por el operario en dicha estación adopta una distribución exponencial con media 1 minuto por pieza. Determine el tiempo medio de permanencia de las piezas en dicho proceso.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Tiempo entre llegadas de piezas a la estación de ensamblado.

Duración de la tarea de ensamblado.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable.

El tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial con media 2 minutos y el tiempo de ensamblado una distribución exponencial con media 1 minuto.

PASO 3. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Tiempo entre llegadas	0,63	0,69	0,22	0,85	0,48
Tiempo de ensamblado	0,71	0,44	0,03	0,14	0,69

PASO 4. Simule el tiempo medio de permanencia de las piezas en la estación de ensamblado.

Pieza	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,63	0,92	0,92	0,92	0,71	0,34	1,26	0,34	0,00	0,34

1	→	Número aleatorio	6	→	Duración de la operación de ensamblado
2	→	Tiempo entre llegadas	7	→	Fin de la operación de ensamblado
3	→	Tiempo de llegada	8	→	Tiempo en la estación de ensamblado
4	→	Inicio de la operación de ensamblado	9	→	Tiempo de espera
5	→	Número aleatorio	10	→	Tiempo promedio en estación ensamblado

<u>Tiempo entre llegadas</u> (2) = $-\dfrac{\ln R}{\lambda}$

$$\text{Tiempo entre llegadas pieza 1} = -\frac{\ln R}{\frac{1}{2}} = -2 \cdot \ln 0{,}63 = 0{,}92$$

<u>Tiempo de llegada de la pieza n</u> (3) = Tiempo de llegada de la pieza (n-1) (3) + Tiempo entre llegadas de la pieza n (2).

Tiempo de llegada de la pieza 1 = 0 + 0,92 = 0,92

<u>Inicio de la operación de ensamblado de la pieza n</u> (4) = Máximo{Tiempo de llegada de la pieza n (3), Fin de la operación de ensamblado de la pieza (n-1) (7)}

Inicio operación ensamblado pieza 1 = Máximo{0,92 0} = 0,92

<u>Duración de la operación de ensamblado</u> (6) = $-\dfrac{\ln R}{\lambda}$

Duración operación ensamblado pieza 1 = $-\dfrac{\ln R}{\frac{1}{1}} = - \cdot \ln 0{,}71 = 0{,}34$

<u>Fin de la operación de ensamblado</u> (7) = Inicio de la operación de ensamblado (4) + Duración de la operación de ensamblado (6).

Fin operación de ensamblado de la pieza 1 = 0,92 + 0,34 = 1,26

<u>Tiempo en la estación de ensamblado</u> (8) = Fin de la operación de ensamblado (7) - Tiempo de llegada a la estación de ensamblado (3).

Tiempo en estación de ensamblado pieza 1 = 1,26 - 0,92 = 0,34

<u>Tiempo de espera</u> (9) = Inicio de la operación de ensamblado (4) - Tiempo de llegada a la estación de ensamblado (3).

Tiempo de espera de la pieza 1 = 0,92 - 0,92 = 0,00

<u>Tiempo promedio en la estación de ensamblado</u> (10)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \text{Tiempo en estación ensamblado pieza i (8)}}{n}$$

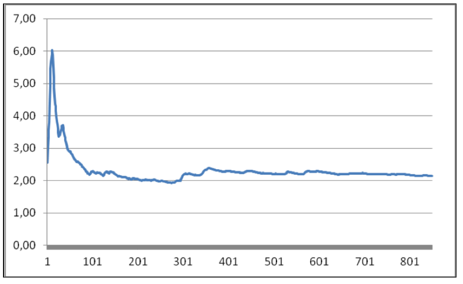
$$\text{Tiempo promedio ensamblado} = \frac{0{,}34}{1} = 0{,}34$$

PASO 5. Repita el PASO 4 cuatro veces más, simulando el tiempo medio de permanencia de las piezas en la estación de ensamblado.

Pieza	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,63	0,92	0,92	0,92	0,71	0,34	1,26	0,34	0,00	0,34
2	0,69	0,74	1,66	1,66	0,44	0,82	2,48	0,82	0,00	0,58
3	0,22	3,03	4,69	4,69	0,03	3,51	8,20	3,51	0,00	1,56
4	0,85	0,33	5,02	8,20	0,14	1,97	10,17	5,15	3,18	2,46
5	0,48	1,47	6,49	10,17	0,69	0,37	10,54	4,05	3,68	2,77

PASO 6. Obtenga la gráfica de estabilización que indica que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Realizando 800 simulaciones con la hoja de cálculo se ha alcanzado la estabilización del tiempo promedio de permanencia de las piezas en la estación de ensamblado.

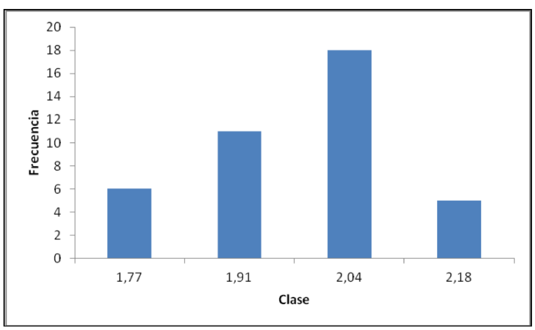


Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del mismo modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 7. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del tiempo promedio de permanencia de las piezas en la estación de ensamblado:

2,05	1,84	2,15	2,04	2,00
2,05	2,12	1,91	2,21	2,01
1,78	1,89	1,95	2,00	1,92
1,71	1,99	1,78	2,06	2,17
2,05	1,83	1,93	2,09	1,93
1,99	1,91	2,08	1,90	1,88
2,06	1,69	1,72	2,08	2,07
2,28	2,01	1,90	2,01	2,07



PASO 8. Calcule el tiempo medio de permanencia de las piezas en la estación de ensamblado y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 1{,}98 \text{ min.} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}135 \text{ min.}$$

PASO 9. Halle el intervalo de confianza del tiempo medio de permanencia de las piezas en la estación de ensamblado con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$1{,}71 \leq \mu \leq 2{,}24$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el tiempo medio de permanencia de las piezas en la estación de ensamblado en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 1,71 y 2,24 minutos.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Pieza**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	1	0,63	0,92	0,92	0,92	0,71	0,34	1,26	0,34	0,00	0,34
3	2	0,69	0,74	1,66	1,66	0,44	0,82	2,48	0,82	0,00	0,58
4	3	0,22	3,03	4,69	4,69	0,03	3,51	8,20	3,51	0,00	1,56
5	4	0,85	0,33	5,02	8,20	0,14	1,97	10,2	5,15	3,18	2,46
6	5	0,48	1,47	6,49	10,2	0,69	0,37	10,5	4,05	3,68	2,77

Número aleatorio (1)

Casilla B2 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Tiempo entre llegadas (2)

Casilla C2 → - 2*LN(B2)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → REDONDEAR(-2*LN(ALEATORIO());2)

Tiempo de llegada (3)

Casilla D2 → C2

Casilla D3 → D2+C3

<u>Inicio de la operación de ensamblado</u> (4)

Casilla E2 → D2

Casilla E3 → MAX(D3;H2)

<u>Número aleatorio</u> (5)

Casilla F2 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Duración de la operación de ensamblado</u> (6)

Casilla G2 → - 1*LN(F2)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → REDONDEAR(-1*LN(ALEATORIO());2)

<u>Fin de la operación de ensamblado</u> (7)

Casilla H2 → E2+G2

<u>Tiempo en la estación de ensamblado</u> (8)

Casilla I2 → H2-D2

<u>Tiempo de espera</u> (9)

Casilla J2 → E2-D2

<u>Tiempo promedio de permanencia de las piezas en la estación de ensamblado</u> (10)

Casilla K2 → PROMEDIO($I$2:I2)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

1.7 CASO Teorema Central del Límite

Teorema Central del Límite → Si muestrea cualquier población un número suficiente de veces y calcula el promedio de los valores obtenidos, el promedio sigue una distribución normal. Compruebe el teorema central del límite en el caso de una población que sigue una ley de Poisson con λ = 1.

SOLUCIÓN

PASO 1. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos.

Sabiendo que la población sigue una distribución de Poisson con λ = 1. Siendo la expresión analítica de la función de densidad de probabilidad de la distribución Poisson:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	0,37	0,37	0,18	0,06	0,02

PASO 2. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	0,37	0,37	0,18	0,06	0,02
F(x)	0,37	0,74	0,92	0,98	1,00

PASO 3. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	0,37	0,37	0,18	0,06	0,02
F(x)	0,37	0,74	0,92	0,98	1,00
Intervalos	0,00 0,36	0,37 0,73	0,74 0,91	0,92 0,97	0,98 1,00

PASO 4. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios que recoge la tabla del PASO 5.

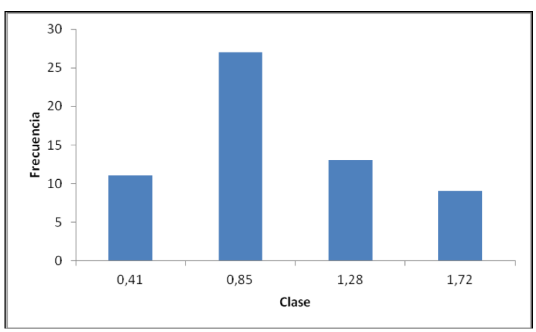
PASO 5. Obtenga una muestra de la población objeto de estudio y calcule su valor promedio. El tamaño de muestra elegido es de 5 elementos.

Muestra	R1	V1	R2	V2	R3	V3	R4	V4	R5	V5	Promedio
1	0,86	2	0,72	1	0,14	0	0,51	1	0,42	1	1,0

R → Número aleatorio V → Valor

PASO 6. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo sesenta veces obteniendo los siguientes valores promedio de cada muestra:



1,0	1,2	1,0	1,0	1,0
2,2	0,8	1,4	0,8	1,2
1,4	1,0	1,6	1,8	1,0
0,6	1,8	1,4	1,0	0,6
1,0	1,0	0,6	0,6	0,8
2,4	1,4	0,8	0,8	1,0
1,0	0,6	0,8	1,0	0,8
1,0	1,0	1,0	1,6	0,4
1,2	1,2	0,8	0,8	1,2
0,8	0,6	1,6	1,2	0,4
1,4	1,2	1,4	0,6	0,4
1,0	0,2	1,6	1,0	1,6

PASO 7. Calcule la media de todos los promedios y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 1{,}06 \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}426$$

PASO 8. Verifique que los valores del PASO 6 siguen una distribución normal. Aplicando la prueba de bondad de ajuste χ^2 de Pearson:

$H_0 \rightarrow$ Los datos de la muestra obtenida en el PASO 6 corresponden a una población que tiene distribución normal.

$H_1 \rightarrow$ Los datos de la muestra obtenida en el PASO 6 corresponden a una población que no tiene distribución normal.

Límite inferior	Límite superior	Frecuencia observada	Frecuencia esperada	$\frac{(FO-FE)^2}{FE}$
0,20	0,65	11	8	1,13
0,65	0,88	11	10	0,10
0,88	1,06	17	12	2,08
1,06	1,24	7	12	2,08
1,24	1,47	6	10	1,60
1,47	2,40	8	8	0,00
Total		60	60	6,99

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(FO_i - FE_i)^2}{FE_i} = 6{,}99$$

Grados de libertad = k - p - 1 = 6 - 2 - 1 = 3. El valor crítico de la distribución χ^2 con 3 grados de libertad y un nivel de significación del 5% es 7,81. Puesto que el valor del estadístico (6,99) es menor que el valor crítico, no puede rechazar la hipótesis de que los datos se ajustan a una distribución normal.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		**f(x)**	**F(x)**	**LI**	**LS**							
2	0	0,37	0,37	0,00	0,36	0						
3	1	0,37	0,74	0,37	0,73	1						
4	2	0,18	0,92	0,74	0,91	2						
5	3	0,06	0,98	0,92	0,97	3						
6	4	0,02	1,00	0,98	1,00	4						
8	**M**	**R1**	**V1**	**R2**	**V2**	**R3**	**V3**	**R4**	**V4**	**R5**	**V5**	**P**
9	1	0,86	2	0,72	1	0,14	0	0,51	1	0,42	1	1,0

M	→	Muestra número	V	→	Valor
R	→	Número aleatorio	P	→	Promedio

<u>f(x)</u>

Casilla B2 → REDONDEAR(POISSON(A2;1;FALSO);2)

<u>F(x)</u>

Casilla C2 → SUMA($B$2:B2)

<u>Número aleatorio</u> (R1)

Casilla B9 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Valor</u> (V1)

Casilla C9 → BUSCARV(B9;$D$2:$F$6;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → BUSCARV(ALEATORIO();$D$2:$F$6;3)

<u>Promedio</u> (P)

Casilla L9 → (C9+E9+G9+I9+K9)/5

1.8 CASO Central de emergencias

La central de un servicio de emergencias dispone de tres teléfonos para atender las llamadas. La duración de las llamadas sigue una distribución normal con los parámetros que recoge la tabla en minutos.

Operador teléfono	Media	Desviación
1	2,0	0,4
2	2,1	0,3
3	1,9	0,5

Determine el tiempo medio de respuesta de la central de emergencias.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Duración de una llamada.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable.

La duración de las llamadas sigue una distribución normal cuyos parámetros dependen del operador telefónico que atiende la llamada.

Operador teléfono	Media	Desviación
1	2,0	0,4
2	2,1	0,3
3	1,9	0,5

PASO 3. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Duración llamada operador 1	0,48	0,31	0,12	0,73	0,02
Duración llamada operador 2	0,68	0,00	0,16	0,16	0,46
Duración llamada operador 3	0,13	0,85	0,45	0,14	0,46

PASO 4. Simule el tiempo medio de respuesta de la central.

	Operador 1			Operador 2			Operador 3			
1	**2**	**Z**	**3**	**4**	**Z**	**5**	**6**	**Z**	**7**	**8**
1	0,48	-0,05	1,98	0,68	0,47	2,24	0,13	-1,13	1,34	2,24

1	→	Llamada número	5	→	Duración
2	→	Número aleatorio	6	→	Número aleatorio
3	→	Duración	7	→	Duración
4	→	Número aleatorio	8	→	Tiempo de respuesta

Z lo obtiene en las tablas de la distribución normal estándar N(0, 1)

Duración operador 1 = $\mu + z \cdot \sigma = 2{,}0 + z \cdot 0{,}4$

Duración operador 2 = $\mu + z \cdot \sigma = 2{,}1 + z \cdot 0{,}3$

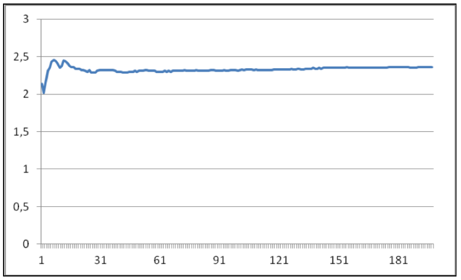
Duración operador 3 = $\mu + z \cdot \sigma = 1{,}9 + z \cdot 0{,}5$

Tiempo de respuesta = Máximo(Duración operador 1, Duración operador 2, Duración operador 3).

PASO 5. Obtenga la gráfica de estabilización que indica que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que simulando 200 llamadas con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del tiempo medio de respuesta de la central de emergencias.

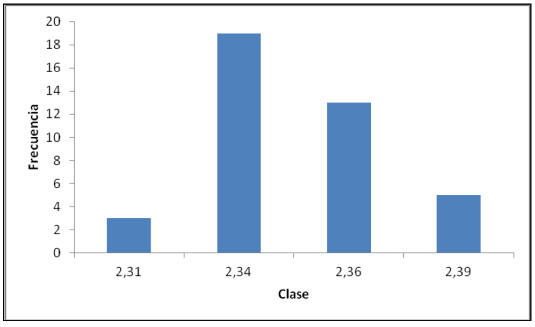
Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.



PASO 6. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del tiempo medio de respuesta de la central de emergencias en minutos:

2,36	2,35	2,34	2,35	2,33
2,33	2,38	2,33	2,35	2,33
2,34	2,38	2,38	2,36	2,34
2,31	2,33	2,34	2,33	2,31
2,36	2,36	2,36	2,35	2,32
2,38	2,35	2,36	2,36	2,38
2,35	2,36	2,36	2,37	2,37
2,36	2,35	2,37	2,33	2,34



PASO 7. Calcule el tiempo medio de respuesta de la central de emergencias y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 2{,}35 \text{ min.} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}019 \text{ min.}$$

PASO 8. Halle el intervalo de confianza del tiempo medio de respuesta de la central de emergencias con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$2{,}31 \leq \mu \leq 2{,}39$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el tiempo medio de respuesta de la central de emergencias en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 2,31 y 2,39 minutos.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				μ	σ							
2	**Operador 1**			2,0	0,4							
3	**Operador 2**			2,1	0,3							
4	**Operador 3**			1,9	0,5							
5												
6		**Operador 1**			**Operador 2**			**Operador 3**				
8	**1**	**2**	**Z**	**3**	**4**	**Z**	**5**	**6**	**Z**	**7**	**8**	**9**
9	1	0,48	-0,05	1,98	0,68	0,47	2,24	0,13	-1,13	1,34	2,24	2,24

<u>Número aleatorio</u> (2, 4 y 6)

Casillas B8, E8 y H8 → ALEATORIO()

<u>Z</u>

Casilla C8 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(B8)

Casilla F8 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(E8)

Casilla I8 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(H8)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola.

Casilla C8 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO());2)

Casilla F8 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO());2)

Casilla I8 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO());2)

<u>Duración</u> (3, 5 y 7)

Casilla D8 → $D$2+(C8*$E$2)

Casilla G8 → $D$3+(F8*$E$3)

Casilla J8 → $D$4+(I8*$E$4)

Las tres casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula

Operador 1 → DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();$D$2;$E$2)

Operador 2 → DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();$D$3;$E$3)

Operador 3 → DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();$D$4;$E$4)

<u>Tiempo de respuesta</u> (8)

Casilla K8 → MAX(D8;G8;J8)

<u>Promedio</u> (9)

Casilla L8 → REDONDEAR(PROMEDIO($K$8;K8);2)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

1.9 CASO Capital Final esperado en un proyecto de inversión

Una empresa está desarrollando un nuevo producto. Los cobros y pagos anuales siguen una distribución normal cuyos parámetros en euros recoge la tabla.

	Media	Desviación
Cobros	4.500.000	500.000
Pagos	2.500.000	1.000.000

Dado que los dos primeros años estarán destinados exclusivamente al desarrollo del producto, no se prevén ingresos. Siendo la duración estimada del proyecto de cinco años y el capital disponible para invertir en el proyecto 2.000.000 de euros, halle el capital final esperado.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Cobros anuales

Pagos anuales

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable.

Los cobros y pagos anuales siguen una distribución normal cuyos parámetros muestra la tabla.

	Media	**Desviación**
Cobros	4.500.000	500.000
Pagos	2.500.000	1.000.000

PASO 3. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

	Año 1	**Año 2**	**Año 3**	**Año 4**	**Año 5**
Cobros	0,18	0,85	0,23	0,08	0,54
Pagos	0,16	0,49	0,59	0,27	0,88

PASO 4. Simule el capital final esperado.

Año	Aleatorio	Z	Cobro	Aleatorio	Z	Pago	Neto
1	0,18	-0,92	0	0,16	-0,99	1.510.000	-1.510.000
2	0,85	1,04	0	0,49	-0,03	2.470.000	-2.470.000
3	0,23	-0,74	4.130.000	0,59	0,23	2.730.000	1.400.000
4	0,08	-1,41	3.795.000	0,27	-0,61	1.890.000	1.905.000
5	0,54	0,10	4.550.000	0,88	1,17	3.670.000	880.000

Los dos primeros años están destinados al desarrollo del producto, no hay ingresos.

Z lo obtiene en las tablas de la distribución normal estándar N(0, 1)

Cobro = $\mu + z \cdot \sigma = 4.500.000 + z \cdot 500.000$

Pago = $\mu + z \cdot \sigma = 2.500.000 + z \cdot 1.000.000$

Neto = Cobro - Pago

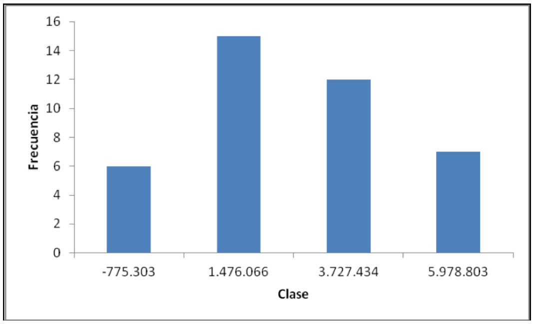
Capital Final = Capital Inicial + $\sum_{i=1}^{5} \text{Neto}_i$

Capital Final = 2.000.000 - 1.510.000 - 2.470.000 + 1.400.000 + 1.905.000 + 880.000 = 2.205.000 euros

PASO 5. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del capital final esperado en euros:

2.260.000	6.720.000	1.510.000	6.385.000	-2.625.000
1.605.000	2.085.000	-10.000	3.480.000	2.455.000
3.405.000	4.070.000	1.885.000	6.385.000	2.795.000
1.845.000	840.000	-830.000	3.680.000	-1.495.000
6.150.000	1.665.000	6.795.000	3.830.000	3.400.000
100.000	2.500.000	1.025.000	3.840.000	3.090.000
1.300.000	5.920.000	3.505.000	3.045.000	5.195.000
1.810.000	855.000	2.840.000	560.000	200.000



PASO 6. Calcule el capital final esperado y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 2.601.750 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 2.251.368{,}40 \text{ euros}$$

PASO 7. Halle el intervalo de confianza del capital final esperado con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$-1.810.851 \leq \mu \leq 7.014.351$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el capital final esperado en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre - 1.810.851 y 7.014.351 euros.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				μ	σ			
2			Cobros	4.500.000	500.000			
3			Pagos	2.500.000	1.000.000			
4								
5	Año	Aleatorio	Z	Cobro	Aleatorio	Z	Pago	Neto
6	1	0,18	-0,92	0	0,16	-0,99	1.510.000	-1.510.000
7	2	0,85	1,04	0	0,49	-0,03	2.470.000	-2.470.000
8	3	0,23	-0,74	4.130.000	0,59	0,23	2.730.000	1.400.000
9	4	0,08	-1,41	3.795.000	0,27	-0,61	1.890.000	1.905.000
10	5	0,54	0,10	4.550.000	0,88	1,17	3.670.000	880.000
11								
12						CAPITAL	FINAL	2.205.000

Número aleatorio

Casillas B6 y E6 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Z

Casilla C6 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(B6)

Casilla F6 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(E6)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola

Casilla C6 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO());2)

Casilla F6 → DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO());2)

Cobro

Casillas D6 y D7 → 0 (Los dos primeros años están destinados al desarrollo del producto, no hay ingresos).

Casilla D8 → $D$2+(C8*$E$2)

Las tres casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula

Cobro → DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();$D$2;$E$2)

Pago

Casilla G6 → $D$3+(F6*$E$3)

Las tres casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula

Pago → DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();$D$3;$E$3)

Neto

Casilla H6 → D6-G6

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar, en este caso cinco.

Capital Final

Casilla H12 → SUMA(H6:H10)+capital inicial

1.10 CASO Análisis de inversiones

Una empresa está interesada en la compra de un inmueble cuyo precio es de 1.000.000 euros de los cuales 200.000 corresponden al terreno. La empresa tiene previsto pagar 250.000 euros en efectivo y el resto mediante un préstamo a 30 años a un interés fijo del 6% anual. El método de amortización que prevé aplicar es el método lineal o de cuotas fijas, tomando en consideración los coeficientes de amortización fijados en la tabla correspondiente del impuesto sobre sociedades. Si logra alquilar todo el inmueble el primer año los ingresos ascenderán a 200.000 euros. El crecimiento anual previsto de los ingresos por alquiler sigue una distribución uniforme (1%, 3%), mientras que la previsión por desocupación y morosidad es que los ingresos pueden verse reducidos entre un 6% y un 20% con 13% como el valor más probable. Por su parte, los gastos anuales se espera que sigan una distribución normal de media 60% y desviación estándar 5%, no siendo inferiores al 50% ni superiores al 70% de los ingresos. Al valor de la propiedad se le estima un crecimiento entre un 3% y un 9% siendo lo más probable un 6%. Sabiendo que la empresa prevé alquilar el inmueble durante 6 años para posteriormente venderlo pagando una comisión del 3% y que el tipo impositivo es del 25%, determine si es rentable la inversión considerando una tasa de descuento anual del 10%.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Crecimiento anual de los ingresos por alquiler

Reducción anual de los ingresos por desocupación y falta de pago

Gastos operativos anuales

Incremento del valor de la propiedad por plusvalía

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable.

El crecimiento anual de los ingresos por alquiler sigue una distribución uniforme (1%, 3%). Los gastos operativos anuales una distribución normal de media 60% y desviación estándar 5%. La Reducción anual de los ingresos por desocupación o falta de pago y la plusvalía siguen una distribución triangular cuyos parámetros recoge la tabla.

	VALOR		
	Pesimista	**Más Probable**	**Optimista**
Desocupación y falta de pago	6 %	13 %	20 %
Plusvalía	3 %	6 %	9 %

PASO 3. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Año	1	2	3	4	5	6
Gastos operativos	0,1558	0,6483	0,1785	0,2731	0,4148	0,0357
Desocupación o falta de pago	0,5540	0,4461	0,9815	0,6337	0,7699	0,9546
Ingresos por alquiler	0,9025	0,8640	0,5489	0,5820	0,1865	0,8191

Plusvalía 0,5026

PASO 4. Calcule los intereses del préstamo.

$$\textbf{Anualidad} = C_0 \times \left[\frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] = 750.000 \times \left[\frac{6\% \times (1+6\%)^{30}}{(1+6\%)^{30} - 1}\right] = 54.486{,}68$$

	Año				
	1	2	3	4	5
Capital pendiente	750.000,00	740.513,32	730.457,44	719.798,21	708.499,42
Intereses	45.000,00	44.430,80	43.827,45	43.187,89	42.509,97
Capital amortizado	9.486,68	10.055,88	10.659,23	11.298,79	11.976,71
	6	7	8	9	10
Capital pendiente	696.522,70	683.827,39	670.370,35	656.105,89	640.985,56
Intereses	41.791,36	41.029,64	40.222,22	39.366,35	38.459,13
Capital amortizado	12.695,32	13.457,04	14.264,46	15.120,33	16.027,55

<u>Intereses año i</u> = Capital pendiente año i x Tanto por uno de interés del préstamo

Intereses año 1 = Capital pendiente año 1 x 0,06 = 750.000 x 0,06

<u>Capital amortizado año i</u> = Anualidad - Intereses año i

Capital amortizado año 1 = Anualidad - Intereses año 1 = 65.388,42 - 45.000

<u>Capital pendiente año i</u> = Capital pendiente año (i - 1) - Capital amortizado año (i - 1)

Capital pendiente año 2 = Capital pendiente año 1 - Capital amortizado año 1

Capital pendiente año 2 = 750.000 - 20.388,42

PASO 5. Halle el Flujo Neto de Caja anual.

	Año					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ingreso Bruto	200.000	205.610	211.219	215.650	220.317	223.342
Desocupación	26.778	25.931	39.400	30.209	33.601	39.957
Gastos operativos	109.881	127.280	117.004	122.883	129.819	113.872
BAI	2.341	-8.032	-5.012	3.370	-1.614	11.721
Impuestos	585	0	0	842	0	2.930
Flujo de Caja Neto	8.269	-2.088	329	7.228	2.410	12.096

<u>Ingresos Brutos año i</u> = Ingresos Brutos año (i - 1) x (1 + Crecimiento ingresos año (i - 1))

Crecimiento ingresos año 1= a+ (b - a) ·R = 1 + (3 - 1) x 0,9025 = 2,805%

Ingresos Brutos año 2 = Ingresos Brutos año 1 x (1 + 2,805%) = 200.000 x (1 + 2,805%)

<u>Desocupación año i</u> = Ingresos Brutos año i x Reducción ingresos por desocupación año i

Reducción ingresos por desocupación

Si $R \leq \dfrac{(b-a)}{(c-a)}$ → Reducción ingresos por desocupación =$a + \sqrt{(c-a)\cdot(b-a)\cdot R}$

Si $R > \dfrac{(b-a)}{(c-a)}$ → Reducción ingresos por desocupación =$c - \sqrt{(c-a)\cdot(c-b)\cdot(1-R)}$

Reducción ingresos por desocupación año 1

R = 0,5540 > $\dfrac{(b-a)}{(c-a)} = \dfrac{(13-6)}{(20-6)} = 0{,}5$

$R > \dfrac{(b-a)}{(c-a)}$ → Reducción ingresos por desocupación año 1 = $c - \sqrt{(c-a)\cdot(c-b)\cdot(1-R)}$

Reducción ingresos por desocupación año 1 = $20 - \sqrt{(20-6)\cdot(20-13)\cdot(1-0{,}5540)} = 13{,}389\,\%$

Desocupación año 1 = Ingresos Brutos año 1 x 13,389% = 200.000 x 13,389%

Gastos operativos año i = Ingresos Brutos año i x Reducción ingresos por gastos operativos año i

Reducción ingresos por gastos operativos año i =$\mu + z \cdot \sigma$

Z lo obtiene en las tablas de la distribución normal estándar N(0,1)

<u>Reducción ingresos por gastos operativos año 1</u>

Reducción ingresos por gastos operativos año 1 $= \mu + z \cdot \sigma = 60\% + (-1{,}012) \times 5\,\% = 54{,}941\,\%$

Gastos operativos año 1 = Ingresos Brutos año 1 x 54,941% = 200.000 x 54,941%

<u>Amortización año i</u> (Método lineal o de cuotas fijas)

Para edificios comerciales, administrativos, de servicios y viviendas el coeficiente de amortización lineal máximo es del 2% y el periodo máximo de años 100.

Base amortizable = 1.000.000 - 200.000 = 800.000

Amortización año i = 2% x Base amortizable = 2% x 800.000

<u>Beneficios Antes Impuestos BAI año i</u> = Ingresos Brutos año i - Desocupación año i - Gastos operativos año i - Amortización año i - Intereses préstamo año i

BAI año 1 = Ingresos Brutos año 1 - Desocupación año 1 - Gastos operativos año 1 - Amortización año 1 - Intereses préstamo año 1

Beneficios Antes Impuestos año 1 = 200.000 - 26.778 - 109.881 - 16.000 - 45.000

<u>Impuestos año i</u>

Si BAI año i ≤ 0 → **Impuestos año i** = 0

Si BAI año i > 0 → **Impuestos año i** = BAI año i x 25%

Impuestos año 1 = 2.341 x 25%

<u>Flujo de Caja Neto año i</u> = BAI año i - Impuestos año i - Capital Amortizado Préstamo año i + Amortización año i

Flujo de Caja Neto año 1 = BAI año 1 - Impuestos año 1 - Capital amortizado préstamo año 1 + Amortización año 1

Flujo de Caja Neto año 1 = 2.341 - 585 - 9.487 + 16.000

PASO 6. Calcule el Beneficio Neto de la venta.

Ingresos por venta de la propiedad	1.419.146
Comisión venta	42.574
Beneficio venta Antes Impuestos	1.376.572
Valor contable de la propiedad	904.000
Base imponible	472.572
Impuestos	118.143
Capital pendiente del préstamo	683.827
Beneficio Neto de la venta	574.602

<u>Ingresos por venta de la propiedad</u> = Valor de la propiedad dentro de 6 años = Valor Actual de la propiedad x $(1 + i)^n$

<u>Plusvalía</u>

Si $R \leq \frac{(b-a)}{(c-a)}$ → Plusvalía = $a + \sqrt{(c-a)\cdot(b-a)\cdot R}$

Si $R > \frac{(b-a)}{(c-a)}$ → Plusvalía = $c - \sqrt{(c-a)\cdot(c-b)\cdot(1-R)}$

<u>Plusvalía anual</u>

R = 0,5026 > $\frac{(b-a)}{(c-a)} = \frac{(6-3)}{(9-3)} = 0{,}5$

$R > \frac{(b-a)}{(c-a)}$ → Plusvalía anual = $c - \sqrt{(c-a)\cdot(c-b)\cdot(1-R)}$

Plusvalía anual = $9 - \sqrt{(9-3)\times(9-3)\times(1-0{,}5026)} = 6{,}0078\,\%$

Valor de la propiedad dentro de 6 años = Valor Actual x $(1 + 6{,}0078\%)^6$

Valor de la propiedad dentro de 6 años = 1.000.000 x $(1 + 6{,}0078\%)^6$ = 1.419.146

Comisión venta = Precio de venta dentro de 6 años x 3%

Comisión venta = Precio de venta dentro de 6 años x 3% = 1.419.146 x 3%

Beneficio venta Antes Impuestos = Ingresos por venta de la propiedad - Comisión venta

Beneficio venta Antes Impuestos = Ingresos por venta de la propiedad - Comisión venta

Beneficio venta Antes Impuestos =1.419.146 - 42.574

Valor contable de la propiedad dentro de 6 años = Precio de compra - Amortización acumulada a lo largo de los 6 años

Valor contable de la propiedad dentro de 6 años = Precio de compra - AA en 6 años

Valor contable de la propiedad dentro de 6 años = 1.000.000 - (16.000 x 6)

Base imponible = Beneficio venta Antes Impuestos - Valor contable de la propiedad

Base imponible = Beneficio venta Antes Impuestos - Valor contable propiedad

Base imponible = 1.376.572 - 904.000

<u>Impuestos</u> = Base Imponible x 25%

Impuestos = Base Imponible x 25% = 472.572 x 25%

<u>Capital pendiente del préstamo año i</u> = Capital pendiente año (i - 1) - Capital amortizado año (i - 1)

Capital pendiente año 7 = Capital pendiente año 6 - Capital amortizado año 6

Capital pendiente año 7 = 696.522,70 - 12.695,32

<u>Beneficio Neto de la venta</u> = Beneficio venta Antes Impuestos - Impuestos - Capital pendiente del préstamo año 7

Beneficio Neto de la venta = Beneficio venta Antes Impuestos - Impuestos - Capital pendiente del préstamo año 7

Beneficio Neto de la venta = 1.376.572 - 118.143 - 683.827

PASO 7. Determine el Valor Actual Neto de la inversión.

Valor Actual del Beneficio Neto de la venta	324.348
Valor Actual del Flujo Neto de Caja	19.299
Valor Actual Neto	93.647

Valor Actual del Beneficio Neto de la venta

$$\text{Valor Actual del Beneficio Neto de la venta} = \frac{\text{VF del Beneficio Neto de la venta}}{(1+i)^n}$$

$$\text{Valor Actual del Beneficio Neto de la venta} = \frac{574.602}{(1+10\%)^6}$$

Valor Actual del Flujo Neto de Caja

$$\textbf{Valor Actual} = \frac{8.269{,}15}{(1+10\%)^1} + \frac{-2.088{,}25}{(1+10\%)^2} + \frac{328{,}80}{(1+10\%)^3} + \frac{7.228{,}34}{(1+10\%)^4} + \frac{2.409{,}51}{(1+10\%)^5} + \frac{12.095{,}68}{(1+10\%)^6}$$

Valor Actual Neto = Valor Actual del Beneficio Neto de la venta + Valor Actual del Flujo Neto de Caja - Aportación de los propietarios

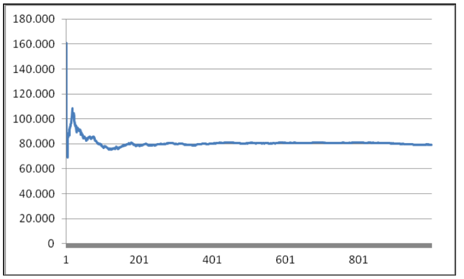
VAN = VA Beneficio Neto de la venta + VA Flujo Neto de Caja - Aportación propietarios

VAN = 324.348 + 19.299 - 250.000

PASO 8. Obtenga la gráfica de estabilización que muestra que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que realizando 1000 simulaciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del valor actual neto.

Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

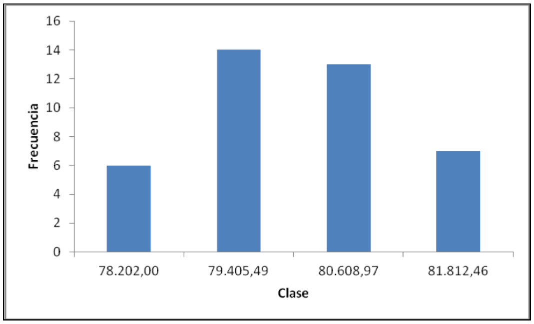


PASO 9. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del valor actual neto en euros:

Replica	VAN promedio	VAN Máximo	VAN Mínimo	Probabilidad de pérdida
1	78.114	225.548	-31.866	4 %
2	81.180	201.032	-49.447	4 %
3	80.715	201.068	-49.581	3 %
4	79.232	223.289	-39.417	4 %
5	79.039	212.731	-47.144	3 %
6	80.868	226.061	-31.937	3 %
7	77.477	199.850	-23.919	3 %
8	81.137	203.774	-58.676	3 %
9	81.432	196.338	-42.756	4 %
10	79.824	211.278	-39.063	3 %
11	78.949	205.351	-37.345	4 %
12	80.678	215.235	-49.301	3 %
13	80.828	211.319	-37.759	3 %
14	79.676	215.941	-38.804	4 %
15	78.185	200.784	-30.370	3 %
16	79.065	198.645	-43.455	3 %

17	81.417	214.292	-35.491	3 %
18	80.675	207.590	-36.540	3 %
19	81.493	197.779	-35.559	3 %
20	81.539	209.974	-44.448	3 %
21	81.383	210.141	-27.723	3 %
22	80.917	201.242	-59.805	4 %
23	81.004	194.798	-40.629	3 %
24	78.918	210.070	-50.749	3 %
25	78.639	216.627	-36.503	3 %
26	79.664	205.174	-44.386	4 %
27	79.887	201.892	-34.227	4 %
28	79.726	206.576	-37.094	3 %
29	80.405	207.994	-54.973	3 %
30	81.802	203.477	-38.767	4 %
31	77.929	206.267	-38.380	3 %
32	80.069	221.909	-53.341	3 %
33	78.958	203.176	-41.413	3 %
34	79.885	203.452	-54.722	3 %
35	78.898	202.815	-35.129	3 %
36	80.916	203.905	-37.113	3 %
37	78.063	198.842	-45.785	3 %
38	80.875	200.395	-33.043	4 %
39	79.245	189.161	-35.774	3 %
40	81.583	200.741	-44.164	3 %



PASO 10. Calcule el valor actual neto promedio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 80.007 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 1.203{,}5 \text{ euros}$$

PASO 11. Halle el intervalo de confianza del valor actual neto esperado con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$77.648 \leq \mu \leq 82.366$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el valor actual neto esperado en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 77.648 y 82.366 euros.

El VAN promedio positivo y la probabilidad de pérdida muy reducida hacen que resulte atractiva la inversión para la empresa.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Precio de compra**	1.000.000	**Tasa de interés**	6 %	**Impuestos**	25 %	
2	**Precio Terreno**	200.000	**Tiempo**	30	**Comisión venta**	3 %	
3	**Aportación Propietarios**	250.000	**Cuota Anual Préstamo**	-54.486,68	**Tasa de descuento**	10 %	
4	**Préstamo**	750.000	**Alquiler primer año**	200.000	**Amortización**	16.000	
5							
6		**Incremento del alquiler**	**Desocupación Falta de pago**	**Plusvalía**	**Gastos Operativos**		
7	**a**	1 %	6 %	3 %	μ	60 %	
8	**b**	3 %	13 %	6 %	**σ**	5 %	
9	**c**		20 %	9 %	**Mínimo**	50 %	
10	**Número aleatorio**			0,5026	**Máximo**	70 %	
11	**VALOR**			6,0078 %			
12							
13							
14		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
15	**Incremento alquiler /Aleatorio**	0,9025	0,8640	0,5489	0,5820	0,1865	0,8191
16	**Incremento alquiler / Valor**	2,805 %	2,728 %	2,098 %	2,164 %	1,373 %	2,638 %
17	**Desocupación / Aleatorio**	0,5540	0,4461	0,9815	0,6337	0,7699	0,9546
18	**Desocupación / Valor**	13,389 %	12,612 %	18,654 %	14,009 %	15,251 %	17,891 %
19	**Gastos operativos / Aleatorio**	0,1558	0,6483	0,1785	0,2731	0,4148	0,0357
20	**Gastos operativos /** $\mu + z \cdot \sigma$	54,941 %	61,904 %	55,395 %	56,983 %	58,924 %	50,985 %
21	**Gastos operativos / Valor**	54,941 %	61,904 %	55,395 %	56,983 %	58,924 %	50,985 %
22							
23							

	A	B	C	D	E	F	G
24	**PRÉSTAMO**						
25		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
26	**Capital pendiente**	750.000,00	740.513,32	730.457,44	719.798,21	708.499,42	696.522,70
27	**Intereses**	45.000,00	44.430,80	43.827,45	43.187,89	42.509,97	41.791,36
28	**Capital amortizado**	9.486,68	10.055,88	10.659,23	11.298,79	11.976,71	12.695,32
29							
30	**FLUJOS DE CAJA ANUAL**						
31	**Ingreso Bruto**	200.000	205.610	211.219	215.650	220.317	223.342
32	**Desocupación/ Falta pago**	26.778	25.931	39.400	30.209	33.601	39.957
33	**Gastos Operativos**	109.881	127.280	117.004	122.883	129.819	113.872
34	**Beneficios Antes Impuestos**	2.341	-8.032	-5.012	3.370	-1.614	11.721
35	**Impuestos**	585	0	0	842	0	2.930
36	**Flujo de caja neto**	8.269	-2.088	329	7.228	2.410	12.096
37							
38	**BENEFICIO NETO DE LA VENTA**			**VALOR ACTUAL NETO**			
39	**Ingresos venta propiedad**	1.419.146		**VA del proceso de venta**		324.348	
40	**Comisión venta**	42.574		**VA del Flujo de Caja**		19.299	
41	**Beneficio venta Antes Impuestos**	1.376.572		**VAN**		93.647	
42	**Valor contable de la propiedad**	904.000					
43	**Base imponible**	472.572					
44	**Impuestos**	118.143					
45	**Capital pendiente préstamo**	683.827					
46	**Beneficio Neto de la venta**	574.602					

<u>Cuota Anual Préstamo</u>

Casilla D3 → PAGO(D1;D2;B4)

<u>Amortización</u>

Casilla F4 → (B1-B2)*0,02

<u>Número aleatorio</u>

Casilla D10 → REDONDEAR(ALEATORIO();4)

<u>Valor Plusvalía</u>

Casilla D11

SI(D10>((D8-D7)/(D9-D7));

D9-RAIZ((D9-D8)*(D9-D7)*(1-D10));

D7+RAIZ((D8-D7)*(D9-D7)*D10))

<u>Incremento alquiler / Aleatorio</u>

Casilla B15 → REDONDEAR(ALEATORIO();4)

Arrastre hacia la derecha casilla B15 hasta casilla G15

<u>Incremento alquiler / Valor</u>

Casilla B16 → $B$7+($B$8-$B$7)*B15

Arrastre hacia la derecha casilla B16 hasta casilla G16

Desocupación / Aleatorio

Casilla B17 → REDONDEAR(ALEATORIO();4)

Arrastre hacia la derecha casilla B17 hasta casilla G17

Desocupación / Valor

Casilla B18

SI(B17>(($C$8-$C$7)/($C$9-$C$7));

$C$9-RAIZ(($C$9-$C$8)*($C$9-$C$7)*(1-B17));

$C$7+RAIZ(($C$8-$C$7)*($C$9-$C$7)*B17))

Arrastre hacia la derecha casilla B18 hasta casilla G18

Gastos operativos / Aleatorio

Casilla B19 → REDONDEAR(ALEATORIO();4)

Arrastre hacia la derecha casilla B19 hasta casilla G19

Gastos operativos / μ + z · σ

Casilla B20 → $F$7+((DISTR.NORM.ESTAND.INV(B19))*$F$8)

Arrastre hacia la derecha casilla B20 hasta casilla G20

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula

DISTR.NORM.INV(REDONDEAR(ALEATORIO();4);$F$7;$F$8)

<u>Gastos operativos / Valor</u>

Casilla B21 → SI(B20<$F$9;$F$9;SI(B20>$F$10;$F$10;B20))

Arrastre hacia la derecha casilla B21 hasta casilla G21

<u>Capital pendiente</u>

Casilla B26 → B4

Casilla C26 → B26-B28

Arrastre hacia la derecha casilla C26 hasta casilla G26

<u>Intereses</u>

Casilla B27 → B26*$D$1

Arrastre hacia la derecha casilla B27 hasta casilla G27

<u>Capital amortizado</u>

Casilla B28 → -$D$3-B27

Arrastre hacia la derecha casilla B28 hasta casilla G28

<u>Ingreso Bruto</u>

Casilla B31 → D4

Casilla C31 → B31*(1+B16)

Arrastre hacia la derecha casilla C31 hasta casilla G31

<u>Desocupación / Falta de pago</u>

Casilla B32 → B31*B18

Arrastre hacia la derecha casilla B32 hasta casilla G32

<u>Gastos Operativos</u>

Casilla B33 → B31*B21

Arrastre hacia la derecha casilla B33 hasta casilla G33

<u>Beneficios Antes Impuestos</u>

Casilla B34 → B31-B32-B33-$F$4-B27

Arrastre hacia la derecha casilla B34 hasta casilla G34

<u>Impuestos</u>

Casilla B35 → SI(B34<0;0;B34*$F$1)

Arrastre hacia la derecha casilla B35 hasta casilla G35

<u>Flujo de Caja Neto</u>

Casilla B36 → B34-B35-B28+$F$4

Arrastre hacia la derecha casilla B36 hasta casilla G36

<u>Ingresos venta de la propiedad</u>

Casilla B39 → VF(D11;G25;0;-B1;0)

Comisión venta

Casilla B40 → B39*F2

Beneficio venta Antes Impuestos

Casilla B41 → B39-B40

Valor contable de la propiedad

Casilla B42 → B1-($F$4*G25)

Base Imponible

Casilla B43 → B41-B42

Impuestos (venta)

Casilla B44 → B43*F1

Capital pendiente del préstamo

Casilla B45 → G26-G28

Beneficio Neto de la venta

Casilla B46 → B41-B44-B45

VA del proceso de venta

Casilla F39 → VA(F3;G25;0;-B46;0)

VA del Flujo de Caja

Casilla F40 → VNA(F3;B36;C36;D36;E36;F36;G36)

VAN

Casilla F41 → F39+F40-B3

1.11 CASO Fórmulas de matriz

Calcule la ganancia esperada en el siguiente juego.

- **Elija un número entre uno y seis.**
- **Lance cuatro veces un dado.**
- **Si el número elegido aparece una, dos, tres o cuatro veces, gana doscientos, trescientos, cuatrocientos o quinientos euros, en caso contrario, si el número elegido no aparece pierde doscientos euros.**

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Número de veces que sale el número elegido.

PASO 2. Simule las veces que sale el número elegido.

Si el número elegido es el 3

Lanzamientos				Aciertos	Beneficio	Beneficio promedio
Primero	Segundo	Tercero	Cuarto			
2	1	4	5	0	-200	-200

<u>Beneficio</u>

SI Aciertos = 0 → Beneficio = - 200

SI Aciertos = 1 → Beneficio = 200

SI Aciertos = 2 → Beneficio = 300

SI Aciertos = 3 → Beneficio = 400

SI Aciertos = 4 → Beneficio = 500

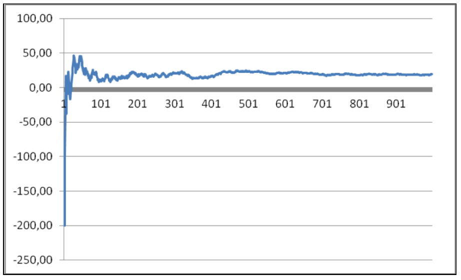
PASO 3. Repita el PASO 2 nueve jugadas más.

Si el número elegido es el 3

Lanzamientos				Aciertos	Beneficio	Beneficio promedio
Primero	Segundo	Tercero	Cuarto			
2	1	4	5	0	-200	-200,00
4	5	4	5	0	-200	-200,00
2	4	4	1	0	-200	-200,00
5	3	5	5	1	200	-100,00
6	2	3	5	1	200	-40,00
5	6	3	3	2	300	16,67
4	4	4	4	0	-200	-14,29
5	6	6	6	0	-200	-37,50
2	4	2	3	1	200	-11,11
3	4	4	4	1	200	10,00

PASO 4. Obtenga la gráfica de estabilización que evidencia que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que simulando 1000 jugadas con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del beneficio medio.

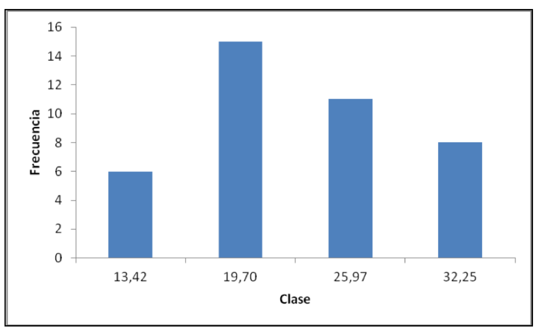


Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 5. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio medio en euros:

19,34	33,47	30,86	28,66	29,56
8,02	22,55	22,34	19,44	14,63
10,02	21,74	29,76	21,94	16,03
20,24	35,27	24,45	21,64	22,95
15,93	19,04	19,94	18,24	24,45
30,96	19,84	26,65	19,64	13,53
29,16	23,85	24,25	19,74	22,95
25,45	21,14	36,47	25,85	23,55



PASO 6. Calcule el beneficio medio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 22{,}84 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 6{,}27 \text{ euros}$$

PASO 7. Halle el intervalo de confianza del beneficio medio con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$10{,}55 \leq \mu \leq 35{,}12$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio medio en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 10,55 y 35,12 euros.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G
1		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	
2		-200	200	300	400	500	
3							
4	**Lanzamiento**				**Aciertos**	**Beneficio**	**Beneficio Promedio**
5	**Primero**	**Segundo**	**Tercero**	**Cuarto**			
6	2	1	4	5	0	-200	-200,00
7	4	5	4	5	0	-200	-200,00
8	2	4	4	1	0	-200	-200,00
9	5	3	5	5	1	200	-100,00
10	6	2	3	5	1	200	-40,00
11	5	6	3	3	2	300	16,67
12	4	4	4	4	0	-200	-14,29
13	5	6	6	6	0	-200	-37,50
14	2	4	2	3	1	200	-11,11
15	3	4	4	4	1	200	10,00

<u>Lanzamiento</u>

Casillas A6, B6, C6 y D6 → ALEATORIO.ENTRE(1;6)

<u>Aciertos</u>

Si el número elegido es el 3

Casilla E6 → SUMA(SI(A6:D6=**3**;1;0))

Se trata de una **fórmula de matriz**. Para especificarla en la hoja de cálculo debe presionar las teclas CTRL+ MAYÚS+ENTRAR. Seguidamente la hoja de cálculo incluye la fórmula entre llaves.

Casilla E6 → {=SUMA(SI(A6:D6=3;1;0))}

<u>Beneficio</u>

Casilla F6 → BUSCARH(E6;$B$1:$F$2;2)

<u>Beneficio promedio</u>

Casilla G6 → PROMEDIO($F$6:F6)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

Cálculo del beneficio medio esperado SIN el uso de la simulación

El número de aciertos sigue una distribución Binomial(4,1/6), es decir, n = 4 ensayos independientes y probabilidad de éxito en cada ensayo de p = 1/6. El cálculo de la probabilidad asociada a cada nivel de aciertos puede realizarlo mediante la hoja de cálculo usando la función

DISTR.BINOM(aciertos;ensayos;probabilidad de éxito;FALSO)

Aciertos	**Probabilidad**		
X_i	$P(X_i)$	**Ganancia**	$X_i \cdot P(X_i)$
0	0,48225309	-200	-96,4506173
1	0,38580247	200	77,1604938
2	0,11574074	300	34,7222222
3	0,0154321	400	6,1728395
4	0,0007716	500	0,3858024
Total			**21,9907407**

De donde el beneficio medio esperado es de 21,99 euros.

1.12 CASO Inversión en nueva tecnología

Una empresa se enfrenta a la posibilidad de invertir en una tecnología muy novedosa para su planta de producción con el objetivo de incrementar la productividad y la flexibilidad de la misma. La inversión supone un desembolso de 50.000.000 de euros. La duración de la inversión así como los flujos de caja anuales son variables aleatorias que pueden tomar los valores que recogen las tablas siguientes.

Años	3	4	5
Probabilidad	0,10	0,60	0,30

Flujo de Caja	15.000.000	35.000.000	40.000.000
Probabilidad	0,30	0,40	0,30

Siendo el tipo de actualización o descuento del 6%, halle el valor actual neto de la inversión.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Duración de la inversión

Flujos de caja anuales

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos históricos.

Años	**3**	**4**	**5**
f(x)	0,10	0,60	0,30

Flujo de Caja	**15.000.000**	**35.000.000**	**40.000.000**
f(x)	0,30	0,40	0,30

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

Años	**3**	**4**	**5**
f(x)	0,10	0,60	0,30
F(x)	0,10	0,70	1,00

Flujo de Caja	**15.000.000**	**35.000.000**	**40.000.000**
f(x)	0,30	0,40	0,30
F(x)	0,30	0,70	1,00

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

Flujo de Caja	**15.000.000**	**35.000.000**	**40.000.000**
f(x)	0,30	0,40	0,30
F(x)	0,30	0,70	1,00
Intervalos	0,00 a 0,29	0,30 a 0,69	0,70 a 1,00

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Duración

0,18	0,85	0,23	0,08	0,54

Flujos de caja

0,16	0,49	0,59	0,27	0,88
0,21	0,62	0,69	0,64	0,48
0,31	0,12	0,73	0,02	0,68
0,00	0,16	0,16	0,46	0,13
0,85	0,45	0,14	0,46	0,32

PASO 6. Simule la duración, los flujos de caja anuales y calcule el VAN esperado con los números aleatorios generados en el PASO 5.

			Año 1		Año 2		Año 3
R	**D**	**R**	**FC**	**R**	**FC**	**R**	**FC**
0,18	4	0,16	15.000.000	0,49	35.000.000	0,59	35.000.000
0,85	5	0,21	15.000.000	0,62	35.000.000	0,69	35.000.000
0,23	4	0,31	35.000.000	0,12	15.000.000	0,73	40.000.000
0,08	3	0,00	15.000.000	0,16	15.000.000	0,16	15.000.000
0,54	4	0,85	40.000.000	0,45	35.000.000	0,14	15.000.000

	Año 4		Año 5		VAN
R	**FC**	**R**	**FC**	**VAN**	**Promedio**
0,27	15.000.000	0,88	40.000.000	36.568.899	36.568.899
0,64	35.000.000	0,48	35.000.000	78.564.808	57.566.853
0,02	15.000.000	0,68	35.000.000	41.834.991	52.322.899
0,46	35.000.000	0,13	15.000.000	-9.904.821	36,765.969
0,46	35.000.000	0,32	35.000.000	59.203.292	41.253.434

R $\rightarrow$ Número aleatorio D $\rightarrow$ Duración FC $\rightarrow$ Flujo de caja

<u>VAN</u>

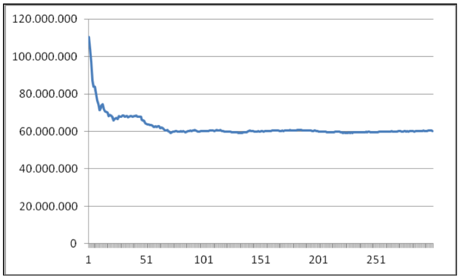
$$\text{Valor Actual} = \frac{FC_{\text{año1}}}{(1+6\%)^1} + \frac{FC_{\text{año2}}}{(1+6\%)^2} + \frac{FC_{\text{año3}}}{(1+6\%)^3} + \frac{FC_{\text{año4}}}{(1+6\%)^4} - 50.000.000$$

$$\text{Valor Actual} = \frac{15.000.000}{(1+6\%)^1} + \frac{35.000.000}{(1+6\%)^2} + \frac{35.000.000}{(1+6\%)^3} + \frac{15.000.000}{(1+6\%)^4} - 50.000.000 = 36.568.899$$

PASO 7. Obtenga la gráfica de estabilización que evidencia que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que realizando 300 simulaciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del VAN.

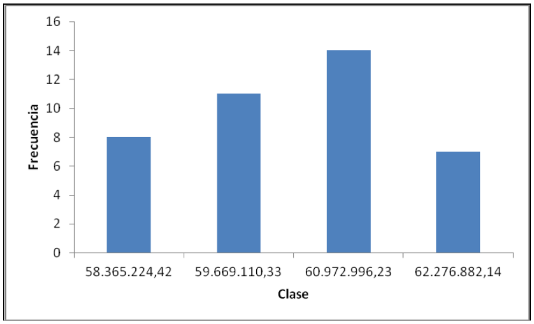
Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.



PASO 8. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del VAN en euros:

59.710.013	61.549.738	56.463.263	61.294.902	61.242.924
62.065.019	61.168.830	60.979.020	61.435.807	58.346.908
60.134.863	59.414.332	59.255.505	61.642.912	59.218.663
61.333.196	60.437.152	60.204.687	58.674.219	62.101.062
60.523.240	58.846.944	60.259.434	61.136.349	60.646.994
62.317.621	59.038.411	62.194.101	60.254.733	61.915.531
58.971.901	60.620.304	58.998.562	60.216.474	59.673.267
60.420.978	58.650.494	60.459.527	62.071.565	58.952.686



PASO 9. Calcule el beneficio medio y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 60.321{,}053 \text{ euros} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 1.303.886 \text{ euros}$$

PASO 10. Halle el intervalo de confianza del VAN con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$57.765.484 \leq \mu \leq 62.876.623$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el VAN en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 57.765.484 y 62.876.623 euros.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	…
1	**D**	**f(x)**	**F(x)**	**LI**	**LS**	**Duración**		
2	3	0,1	0,1	0,0	0,1	3		
3	4	0,6	0,7	0,1	0,7	4		
4	5	0,3	1,0	0,7	1,0	5		
5								
6		Tasa de descuento			6 %			
7								
8				**Año 1**		**Año 2**		
9	**R**	**D**	**R**	**Flujo caja**	**R**	**Flujo caja**	**R**	
10	0,18	4	0,16	15.000.000	0,49	35.000.000	0,59	…

	…	H	I	J	K	L	M	N
1		**Flujo caja**	**f(x)**	**F(x)**	**LI**	**LS**	**Flujo caja**	
2		15.000.000	0,3	0,3	0,0	0,3	15.000.000	
3		35.000.000	0,4	0,7	0,3	0,7	35.000.000	
4		40.000.000	0,3	1,0	0,7	1,0	40.000.000	
5								
6			Desembolso inicial			50.000.000		
7								
8		**Año 3**		**Año 4**		**Año 5**		**VAN**
9		**Flujo caja**	**R**	**Flujo caja**	**R**	**Flujo caja**	**VAN**	**Promedio**
10	…	35.000.000	0,27	15.000.000	0,88	40.000.000	36.568.899	36.568.899

R → Número aleatorio

D → Duración

VAN → Valor Actual Neto

LI → Límite inferior

LS → Límite Superior

<u>Número aleatorio</u> (R)

Casillas A10, C10, E10, G10, I10 y K10

REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Duración</u> (D)

Casilla B10 → BUSCARV(A10;$D$2:$F$4;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula

BUSCARV(REDONDEAR(ALEATORIO();2);$D$2:$F$4;3)

<u>Flujo de Caja</u>

Casilla D10 → BUSCARV(C10;$K$2:$M$4;3)

Casilla F10 → BUSCARV(E10;$K$2:$M$4;3)

Casilla H10 → BUSCARV(G10;$K$2:$M$4;3)

Casilla J10 → BUSCARV(I10;$K$2:$M$4;3)

Casilla L10 → BUSCARV(K10;$K$2:$M$4;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla para cada año con la fórmula

BUSCARV(REDONDEAR(ALEATORIO();2);$K$2:$M$4;3)

VAN

Casilla M10

SI(B10=3;VNA($E$6;D10;F10;H10)-$L$6;

SI(B10=4;VNA($E$6;D10;F10;H10;J10)-$L$6;

SI(B10=5;VNA($E$6;D10;F10;H10;J10;L10)-$L$6;"")))

VAN Promedio

Casilla N10 → PROMEDIO($M$10: M10)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

1.13 CASO Cuando llevar a cabo una simulación

Calcule la probabilidad de que aparezcan dos caras lanzando tres veces una moneda al aire.

1. **Analíticamente.**
2. **Mediante simulación.**
3. **A partir de este experimento indique cuando resulta conveniente recurrir a la simulación.**

SOLUCIÓN

1. Analíticamente.

Se trata de una variable aleatoria B(3, 1/2) de donde

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$f(x = 2) = \binom{3}{2} \times 0{,}5^2 \times (1-0{,}5)^{3-2} = 0{,}375$$

La probabilidad de que aparezcan dos caras lanzando tres veces una moneda al aire es del 37,5%

2. Mediante simulación.

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Número de veces que salen dos caras.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos históricos.

	Cara	Cruz
f(x)	0,5	0,5

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

	Cara	Cruz
f(x)	0,5	0,5
F(x)	0,5	1,0

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

	Cara	Cruz
f(x)	0,5	0,5
F(x)	0,5	1,0
Intervalos	0,00 a 0,49	0,50 a 1,00

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

0,86	0,95	0,19

PASO 6. Simule un lanzamiento.

Lanzamientos						Número de caras	¿Aparecen dos caras?	Promedio
R_1	R_2	R_3	Primero	Segundo	Tercero			
0,86	0,95	0,19	Cruz	Cruz	Cara	1	0	0

<u>Si Número de caras = 2</u>

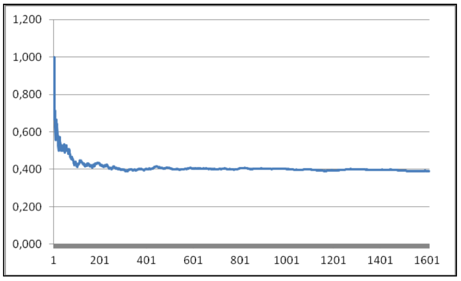
¿Aparecen dos caras? = 1

<u>Si Número de caras ≠ 2</u>

¿Aparecen dos caras? = 0

PASO 7. Obtenga la gráfica de estabilización que indica que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que realizando 1.600 simulaciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización de la probabilidad de que aparezcan dos caras lanzando tres veces una moneda al aire.

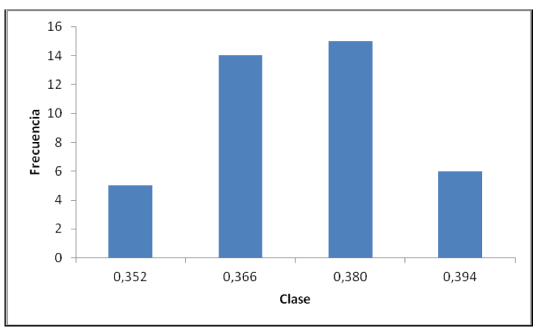


Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 8. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores de la probabilidad de que aparezcan dos caras lanzando tres veces una moneda al aire:

0,360	0,348	0,381	0,348	0,390
0,388	0,383	0,370	0,363	0,384
0,375	0,360	0,389	0,376	0,365
0,365	0,378	0,357	0,375	0,378
0,348	0,386	0,370	0,371	0,379
0,366	0,384	0,383	0,350	0,375
0,371	0,384	0,361	0,377	0,404
0,361	0,391	0,390	0,361	0,373



PASO 9. Calcule la probabilidad de que aparezcan dos caras lanzando tres veces una moneda al aire y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0{,}373 \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}01339$$

PASO 10. Halle el intervalo de confianza de la probabilidad de que aparezcan dos caras lanzando tres veces una moneda al aire con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0{,}347 \leq \mu \leq 0{,}399$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, la probabilidad de que aparezcan dos caras lanzando tres veces una moneda al aire en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 0,347 y 0,399.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**f(x)**	**F(x)**	**LI**	**LS**				
2	**CARA**	0,5	0,5	0,0	0,5	**CARA**			
3	**CRUZ**	0,5	1,0	0,5	1,0	**CRUZ**			
4									
5	**Lanzamientos**						**N**	**A**	**P**
6	**R_1**	**R_2**	**R_3**	**1º**	**2º**	**3º**			
7	0,86	0,95	0,19	CRUZ	CRUZ	CARA	1	0	0,0
8	0,29	0,36	0,44	CARA	CARA	CARA	3	0	0,0
9	0,83	0,41	0,60	CRUZ	CARA	CRUZ	1	0	0,0
10	0,12	0,56	0,50	CARA	CRUZ	CRUZ	1	0	0,0
11	0,47	0,32	0,98	CARA	CARA	CRUZ	2	1	0,2
12									

LI	→	Límite inferior intervalo	LS	→	Límite superior intervalo
R_i	→	Número Aleatorio	1º	→	Lanzamiento Primero
2º	→	Lanzamiento Segundo	3º	→	Lanzamiento Tercero
N	→	Número de caras	A	→	¿Aparecen dos caras?
P	→	Promedio			

<u>Número aleatorio</u> (R_1, R_2 y R_3)

Casilla A7 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Casilla B7 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Casilla C7 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Lanzamientos</u> (1º, 2º y 3º)

Casilla D7 → BUSCARV(A7;$D$2:$F$3;3)

Casilla E7 → BUSCARV(B7;$D$2:$F$3;3)

Casilla F7 → BUSCARV(C7;$D$2:$F$3;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula

BUSCARV(REDONDEAR(ALEATORIO();2);$D$2:$F$3;3)

<u>Número de caras</u> (N)

Casilla G7 → CONTAR.SI(D7:F7;"CARA")

<u>¿Aparecen dos caras?</u> (A)

Casilla H7 → SI(G7=2;1;0)

<u>Promedio</u> (P)

Casilla I7 → PROMEDIO($H$7:H7)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

3. A partir de este experimento indique cuando resulta conveniente recurrir a la simulación.

La resolución del experimento mediante procedimientos analíticos proporciona la solución exacta de forma rápida y sencilla, contrariamente, la simulación aporta una aproximación de la solución que resulta compleja y costosa de alcanzar. Es por ello que el primer intento debe ser siempre tratar de resolver analíticamente el problema, solo en aquellas circunstancias en que la resolución analítica no sea factible o resulte excesivamente compleja, es preferible un acercamiento a la solución mediante la simulación.

1.14 CASO Cola de un supermercado con dos cajas

La llegada de clientes a la única línea de espera de un supermercado con 2 cajas sigue una distribución de Poisson de media 2 personas cada minuto. Sabiendo que el servicio en cada caja se distribuye Poisson de media 1,25 personas cada minuto, simule 8 horas y determine el tiempo promedio en el sistema.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Las llegadas de clientes a la línea de espera.

El servicio de cobro en cada caja.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos históricos.

Las llegadas de clientes a la línea de espera siguen una distribución Poisson con λ = 2. Siendo la expresión analítica de la función de densidad de probabilidad de la distribución Poisson:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Llegadas	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
f(x)	0,14	0,27	0,27	0,18	0,09	0,04	0,01

El servicio en cada caja sigue una distribución Poisson con λ= 1,25. Siendo la expresión analítica de la función de densidad de probabilidad de la distribución Poisson:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Servicio	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,29	0,36	0,22	0,09	0,03	0,01

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

Llegadas	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,14	0,27	0,27	0,18	0,09	0,04	0,01
F(x)	0,14	0,41	0,68	0,86	0,95	0,99	1,00

Servicio	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,29	0,36	0,22	0,09	0,03	0,01
F(x)	0,29	0,65	0,87	0,96	0,99	1,00

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

Llegadas	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,14	0,27	0,27	0,18	0,09	0,04	0,01
F(x)	0,14	0,41	0,68	0,86	0,95	0,99	1,00
Intervalos	0,00 0,13	0,14 0,40	0,41 0,67	0,68 0,85	0,86 0,94	0,95 0,98	0,99 1,00

Servicio	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,29	0,36	0,22	0,09	0,03	0,01
F(x)	0,29	0,65	0,87	0,96	0,99	1,00
Intervalos	0,00 0,28	0,29 0,64	0,65 0,86	0,87 0,95	0,96 0,98	0,99 1,00

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Llegadas	0,86	0,95	0,19	0,30	0,48
Servicio caja 1	0,24	0,97	0,52	0,93	0,24
Servicio caja 2	0,65	0,76	0,64	0,70	0,34

PASO 6. Simule el funcionamiento de un minuto del sistema.

M	CEC	R	LI	CAC	R	CSC1	R	CSC2	TCS	L_q	λ	$\mu \cdot s$
1	0	0,86	4	4	0,24	0	0,65	2	2	0	4	2

M	→	Minuto	CEC	→	Clientes en la cola
R	→	Número Aleatorio	LI	→	Número de llegadas
CAC	→	Total de clientes a cobrar	CSC1	→	Clientes servidos caja 1
CSC2	→	Clientes servidos caja 2	TCS	→	Total clientes servidos
L_q	→	Promedio clientes en cola	λ	→	Promedio llegadas
$\mu \cdot s$	→	Promedio clientes servidos			

Clientes en cola (CEC) en el minuto i = Total de clientes a los que cobrar (CAC) en el minuto (i - 1) - Total de clientes servidos (TCS) en el minuto (i - 1)

Total de clientes a cobrar (CAC) = Número de llegadas (Ll) + Clientes en cola (CEC)

Si (Clientes servidos caja 1 + Clientes servidos caja 2) > Total de clientes a cobrar

Total de clientes servidos (TCS) = Total clientes a cobrar (CAC)

Si (Clientes servidos caja 1 + Clientes servidos caja 2) ≤ Total de clientes a cobrar

Total de clientes servidos (TCS) = Clientes servidos caja 1 (CSC1) + Clientes servidos caja 2 (CSC2)

PASO 7. Repita el PASO 6 cuatro minutos más de funcionamiento del sistema y calcule el tiempo promedio de permanencia en el mismo.

M	CEC	R	LI	CAC	R	CSC1	R	CSC2	TCS	L_q	λ	$\mu \cdot$ s
1	0	0,86	4	4	0,24	0	0,65	2	2	0,00	4,00	2,00
2	2	0,95	5	7	0,97	4	0,76	2	6	1,00	4,50	4,00
3	1	0,19	1	2	0,52	1	0,64	1	2	1,00	3,33	3,33
4	0	0,30	1	1	0,93	3	0,70	2	1	0,75	2,75	2,75
5	0	0,48	2	2	0,24	0	0,34	1	1	0,60	2,60	2,40

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}60}{2{,}60} = 0{,}23 \text{ minutos}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0{,}23 + \frac{1}{1{,}2} = 1{,}06 \text{ minutos}$$

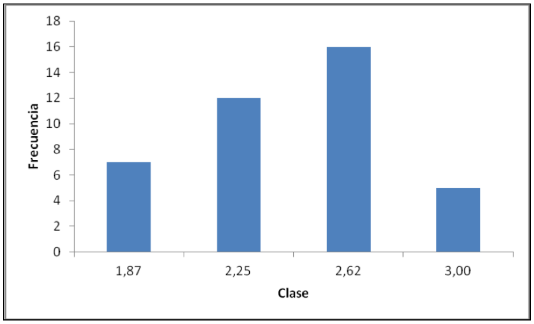
$$L = \lambda \cdot W = 2{,}60 \times 1{,}06 = 2{,}756$$

L	→	Número promedio de clientes en el sistema
W	→	Tiempo promedio de permanencia de un cliente en el sistema
L_q	→	Número promedio de clientes en cola esperando servicio
W_q	→	Tiempo promedio de permanencia de un cliente en la cola

PASO 8. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del tiempo promedio de permanencia en el sistema en minutos:

2,48	2,90	2,17	2,68	2,48
1,98	2,21	2,25	2,13	2,14
2,52	1,97	2,16	1,89	2,53
2,27	2,55	2,59	2,48	2,49
2,43	2,32	2,76	3,23	3,71
2,54	2,14	2,73	1,94	2,06
2,59	2,85	1,85	2,46	2,76
2,53	2,39	2,04	2,82	2,44



PASO 9. Calcule el tiempo promedio de permanencia en el sistema y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 2{,}44 \text{ minutos} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}37 \text{ minutos}$$

PASO 10. Halle el intervalo de confianza del tiempo promedio de permanencia en el sistema con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$1{,}71 \leq \mu \leq 3{,}17$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el tiempo promedio de permanencia en el sistema en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 1,71 y 3,17 minutos.

Siendo la solución analítica:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{2}{2 \times 1{,}25} = 0{,}8$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{(2/1{,}25)^n}{n!} + \frac{(2/1{,}25)^s}{2} \cdot \frac{1}{1-0{,}8}} = 0{,}11111$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \cdot \rho}{s! \cdot (1-\rho)^2} \cdot P_0 = \frac{(2/1{,}25)^2 \times 0{,}8}{2 \times (1-0{,}8)^2} \times 0{,}11111 = 2{,}84$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2{,}84}{2} = 1{,}42 \text{ minutos}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 1{,}42 + \frac{1}{1{,}25} = 2{,}22 \text{ minutos}$$

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Llega**	**f(x)**	**F(x)**	**LI**	**LS**	**Llega**		**Servid**	**f(x)**	**F(x)**	**LI**	**LS**	**Servid**	
2	0	0,14	0,14	0,00	0,13	0		0	0,29	0,29	0,00	0,28	0	
3	1	0,27	0,41	0,14	0,40	1		1	0,36	0,65	0,29	0,64	1	
4	2	0,27	0,68	0,41	0,67	2		2	0,22	0,87	0,65	0,86	2	
5	3	0,18	0,86	0,68	0,85	3		3	0,09	0,96	0,87	0,95	3	
6	4	0,09	0,95	0,86	0,94	4		4	0,03	0,99	0,96	0,98	4	
7	5	0,04	0,99	0,95	0,98	5		5	0,01	1,00	0,99	1,00	5	
8	6	0,01	1,00	0,99	1,00	6								
9														
10	**Minuto**	**CEC**	**R**	**Llega**	**CAC**	**R**	**CSC1**	**R**	**CSC2**	**TCS**		**L_q**	λ	$\mu \cdot$ **s**
11	1	0	0,86	4	4	0,24	0	0,65	2	2		0,00	4,00	2,00
12	2	2	0,95	5	7	0,97	4	0,76	2	6		1,00	4,50	4,00
13	3	1	0,19	1	2	0,52	1	0,64	1	2		1,00	3,33	3,33
14	4	0	0,30	1	1	0,93	3	0,70	2	1		0,75	2,75	2,75
15	5	0	0,48	2	2	0,24	0	0,34	1	1		0,60	2,60	2,40
16					**Tiempo promedio permanencia de un cliente en la cola, Wq**							0,23		
17					**Tiempo promedio permanencia de un cliente en el sistema, W**							1,06		
18					**Número promedio de clientes en el sistema, L**							2,76		

Llega	→	Número de llegadas	LI	→	Límite Inferior
LS	→	Límite Superior	Servid	→	Número de clientes servidos
CEC	→	Clientes en cola	R	→	Número Aleatorio
CAC	→	Total de clientes a cobrar	CSC1	→	Clientes servidos caja 1
CSC2	→	Clientes servidos caja 2	TCS	→	Total clientes servidos
L_q	→	Promedio clientes en cola	λ	→	Promedio llegadas
$\mu \cdot s$	→	Promedio clientes servidos			

<u>Clientes en cola</u> (CEC)

Casilla B11 → 0

Casilla B12 → E11-J11

<u>Número Aleatorio</u> (R)

Casillas C11, F11 y H11 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Número de llegadas</u> (Llega)

Casilla D11 → BUSCARV(C11;$D$2:$F$8;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula

BUSCARV(REDONDEAR(ALEATORIO();2);$D$2:$F$8;3)

<u>Total de clientes a cobrar</u> (CAC)

Casilla E11 → D11+B11

<u>Clientes atendidos en la caja 1</u> (CSC1)

Casilla G11 → BUSCARV(F11;$K$2:$M$7;3)

Esta casilla puede juntarse con la casilla F11 en una sola casilla con la fórmula

BUSCARV(REDONDEAR(ALEATORIO();2);$K$2:$M$7;3)

<u>Clientes atendidos en la caja 2</u> (CSC2)

Casilla I11 → BUSCARV(H11;$K$2:$M$7;3)

Esta casilla puede juntarse con la casilla H11 en una sola casilla con la fórmula

BUSCARV(REDONDEAR(ALEATORIO();2);$K$2:$M$7;3)

<u>Total de clientes servidos</u> (TCS)

Casilla J11 → SI((I11+G11)>E11;E11; (I11+G11))

<u>Promedio de clientes en cola</u> (L_q)

Casilla L11 → PROMEDIO($B$11:B11)

<u>Promedio de llegadas</u> (λ)

Casilla M11 → PROMEDIO($D$11:D11)

<u>Promedio de clientes servidos</u> ($\mu \cdot$ s)

Casilla N11 → PROMEDIO($J$11:J11)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar, en este caso 480 simulaciones correspondientes a los 480 minutos que permanece abierto diariamente el supermercado.

<u>Tiempo promedio de permanencia de un cliente en la cola</u> (W_q)

Casilla L16 → L15/M15

<u>Tiempo promedio de permanencia de un cliente en el sistema</u> (W)

Casilla L17 → L16+(1/(N15/2))

<u>Número promedio de clientes en el sistema</u> (L)

Casilla L18 → M15*L17

1.15 CASO Resolución de integrales

Calcule $\int_0^1 x \cdot dx$

SOLUCIÓN

PASO 1. Genere números aleatorios.

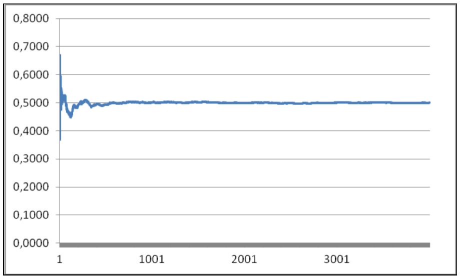
Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

0,14	0,68	0,13	0,00	0,12	0,43	0,44	0,56	0,50	0,99
0,87	0,51	0,87	0,93	0,50					

PASO 2. Simule el valor esperado $E[g(R_i)]$.

R	g(R)	E(g(R))
0,14	0,14	0,14
0,68	0,68	0,41
0,13	0,13	0,32
0,00	0,00	0,24
0,12	0,12	0,21
0,43	0,43	0,25
0,44	0,44	0,28
0,56	0,56	0,31
0,50	0,50	0,33
0,99	0,99	0,40
0,87	0,87	0,44
0,51	0,51	0,45
0,87	0,87	0,48
0,93	0,93	0,51
0,50	0,50	0,51

PASO 3. Obtenga la gráfica de estabilización que muestra que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

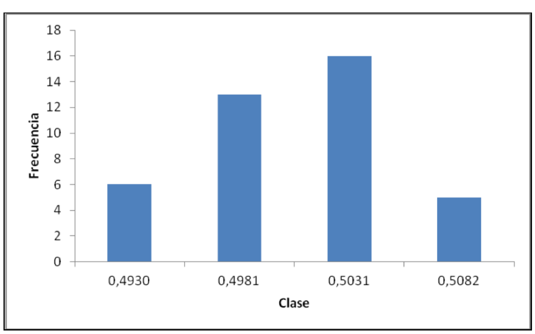


Vea en la gráfica que realizando cuatro mil simulaciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del resultado. Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 4. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores:

0,4994	0,5044	0,5028	0,4975	0,5028
0,4938	0,5019	0,4944	0,5099	0,4997
0,5032	0,5055	0,5045	0,4963	0,4937
0,5122	0,4923	0,5005	0,5007	0,4965
0,5012	0,4971	0,5007	0,5071	0,4911
0,5025	0,4976	0,5013	0,5000	0,5013
0,4983	0,4969	0,5049	0,4962	0,5116
0,5067	0,5034	0,4931	0,5023	0,4981



PASO 5. Calcule el resultado de la integral y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0{,}5006 \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}0050$$

PASO 6. Halle el intervalo de confianza con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0{,}4907 \leq \mu \leq 0{,}5105$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el resultado en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 0,4907 y 0,5105.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B
1	ALEATORIO()	PROMEDIO($A$1:A1)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

Estimación de integrales

$$\int_a^b h(x) \cdot dx \text{ con a < b}$$

Suponiendo que x es un número aleatorio distribuido uniforme (a, b), f(x) es la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

El número y = h(x) también será un número aleatorio con valor esperado μ = E(y), de donde:

$$E(y) = \int_a^b h(x) \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b h(x) \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b h(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b h(x) \cdot dx = (b-a) \cdot E(y)$$

Dado que E(y) no es conocido, debe ser estimado mediante el promedio de una muestra. Lo propio sucede con $\int_a^b h(x) \cdot dx$, debe ser estimada de la siguiente manera:

$$\int_a^b h(x) \cdot dx = (b - a) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} h(x_i)}{n}$$

A continuación se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot dx$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C
1	(PI()/2)* ALEATORIO()	SENO(A1)	(PROMEDIO($B$1:B1))*(PI()/2)

Aleatorio entre 0 y $\pi/2$

a + (b - a) · R = 0 + ($\pi/2$ - 0) · R = $\pi/2$ · R

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot dx = 1{,}00464069$$

Siendo la resolución analítica:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot dx = 1$$

Ejemplo 1.2

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) \cdot dx$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C
1	(PI()^2)* ALEATORIO()	SENO(RAIZ(A1))	(PROMEDIO($B$1:B1))*(PI()^2)

Aleatorio entre 0 y π^2

$$a + (b - a) \cdot R = 0 + (\pi^2 - 0) \cdot R = \pi^2 \cdot R$$

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) \cdot dx = 6{,}28272395$$

Siendo la resolución analítica:

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) \cdot dx = 6{,}283185307$$

Ejemplo 1.3

$$\int_{2}^{3} \frac{x}{(x^2 - 1)} \cdot dx$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C
1	2 + ALEATORIO()	A1/((A1^2) - 1)	(PROMEDIO($B$1:B1))*(3 - 2)

Aleatorio entre 2 y 3

$$a + (b - a) \cdot R = 2 + (3 - 2) \cdot R = 2 + R$$

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_{2}^{3} \frac{x}{(x^2 - 1)} \cdot dx = 0{,}48986608$$

Siendo la resolución analítica:

$$\int_{2}^{3} \frac{x}{(x^2 - 1)} \cdot dx = 0{,}490414627$$

En el caso particular que x sea un número aleatorio distribuido uniforme (0, 1):

$$\int_0^1 h(x) \cdot dx = \frac{\sum_{i=1}^{n} h(x_i)}{n}$$

Integral entre a y b

$\int_a^b g(y) \cdot dy$ con $a<b$, puede realizarse el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{y-a}{b-a} \qquad \rightarrow \qquad y = a + (b-a) \cdot x$$

$$dx = \frac{1}{b-a} \cdot dy \qquad \rightarrow \qquad dy = (b-a) \cdot dx$$

de donde:

$$\int_a^b = g(y) \cdot dy = \int_0^1 (g(a + (b-a) \cdot x)) \cdot (b-a) \cdot dx = \int_0^1 h(x) \cdot dx$$

Ejemplo 1.4

$$\int_{2}^{3} \frac{y}{y^2 - 1} \cdot dy$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

$$y = a + (b - a) \cdot x = 2 + (3 - 2) \cdot x = 2 + x$$

$$dy = (b - a) \cdot dx = (3 - 2) \cdot dx = dx$$

$$\int_{2}^{3} \frac{y}{y^2 - 1} \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{2 + x}{(2 + x)^2 - 1} \cdot dx$$

	A	B	C
1	2 + ALEATORIO()	A1/((A1^2) - 1)	PROMEDIO($B$1:B1)

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_{2}^{3} \frac{y}{y^2 - 1} \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{2 + x}{(2 + x)^2 - 1} \cdot dx = 0{,}48986608$$

Siendo la resolución analítica:

$$\int_{2}^{3} \frac{y}{y^2 - 1} \cdot dy = 0{,}490414627$$

Integral entre a y ∞

En el caso de $\int_a^{\infty} g(y) \cdot dy$ considere el siguiente cambio de variable:

$$y = a - \ln(1 - x) \qquad \rightarrow \qquad dy = \frac{1}{(1 - x)} \cdot dx$$

de donde:

$$\int_a^{\infty} g(y) \cdot dy = \int_0^1 \frac{g(a - \ln(1 - x))}{(1 - x)} \cdot dx = \int_0^1 h(x) \cdot dx$$

Ejemplo 1.5

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{y}}} \cdot dy$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

$$y = a - \ln(1-x) = 0 - \ln(1-x) = -\ln(1-x)$$

$$dy = \frac{1}{(1-x)} \cdot dx$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{y}}} \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{e^{-\ln(1-x)}}} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot dx$$

	A	B	C	D	E
1	ALEATORIO()	1/(RAIZ(EXP(-(LN(1-A1)))))	1/(1-A1)	B1*C1	PROMEDIO($D$1:D1)

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{y}}} \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{e^{-\ln(1-x)}}} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot dx = 2{,}01766278$$

Siendo la resolución analítica:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^y}} \cdot dy = 2$$

Ejemplo 1.6

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{y \cdot (\ln(y))^8} \cdot dy$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

$$y = a - \ln(1 - x) = 2 - \ln(1 - x)$$

$$dy = \frac{1}{(1 - x)} \cdot dx$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{y \cdot (\ln(y))^8} \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{1}{(2 - \ln(1 - x)) \cdot (\ln(2 - \ln(1 - x)))^8} \cdot \frac{1}{(1 - x)} \cdot dx$$

	A	B	C	D	E	F
1	ALEATORIO()	2-LN(1-A1)	1/(B1*((LN(B1))^8)	1/(1-A1)	C1*D1	PROMEDIO($E$1:E1)

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{y \cdot (\ln(y))^8} \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{1}{(2 - \ln(1 - x)) \cdot (\ln(2 - \ln(1 - x)))^8} \cdot \frac{1}{(1 - x)} \cdot dx = 1{,}862714$$

Siendo la resolución analítica:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{y \cdot (\ln(y))^8} \cdot dy = 1{,}85833383$$

<u>Integral entre -∞ y b</u>

$\int_{-\infty}^{b} g(y) \cdot dy$ aplique el cambio de variable:

$$y = b + \ln x \qquad \rightarrow \qquad dy = \frac{1}{x} \cdot dx$$

de donde:

$$\int_{-\infty}^{b} g(y) \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{g(b + \ln(x))}{x} \cdot dx = \int_{0}^{1} h(x) \cdot dx$$

Ejemplo 1.7

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2y} \cdot dy$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

$$y = b + \ln(x) = 0 + \ln(x)$$

$$dy = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2y} \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{(e^2)^{\ln(x)}}{x} \cdot dx$$

	A	B	C	D	E
1	ALEATORIO()	LN(A1)	(EXP(2))^B1	C1/A1	PROMEDIO($D$1:D1)

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2y} \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{(e^2)^{\ln(x)}}{x} \cdot dx = 0{,}502180672$$

Siendo la resolución analítica:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2y} \cdot dy = 0{,}5$$

<u>Integral entre -∞ y +∞</u>

$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot dy$ realice el cambio de variable:

$$y = \ln \frac{x}{(1-x)} \qquad \rightarrow \qquad dy = \frac{1}{x \cdot (1-x)} \cdot dx$$

de donde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot dy = \int_{0}^{1} \frac{g(\ln(x/(1-x)))}{x \cdot (1-x)} \cdot dx = \int_{0}^{1} h(x) \cdot dx$$

Ejemplo 1.8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^y + e^{-y}} \cdot dy$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

$$y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$dy = \frac{1}{x \cdot (1-x)} \cdot dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^y + e^{-y}} \cdot dy = \int_0^1 \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}} \cdot \frac{1}{x \cdot (1-x)} \cdot dx$$

	A	B	C	D	E	F
1	ALEATORIO()	LN(A1/(1-A1))	1/((EXP(B1))+ (EXP(-B1)))	1/(A1*(1-A1))	C1*D1	PROMEDIO($E$1:E1)

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^y + e^{-y}} \cdot dy = \int_0^1 \frac{(e^2)^{\ln(x)}}{x} \cdot dx = 1{,}56832519$$

Siendo la resolución analítica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^y + e^{-y}} \cdot dy = 1{,}57079633$$

Integrales múltiples

El método de Monte Carlo no resulta muy eficiente para el cálculo de integrales de una sola variable dada la existencia de métodos numéricos sobradamente conocidos cuya convergencia se alcanza mucho más rápidamente. Sin embargo, Monte Carlo cobra una relevancia especial en el caso del cálculo de integrales múltiples. Tal y como se ha explicado con anterioridad, si aumenta la dimensión de la integral, Monte Carlo no ve afectada su velocidad de convergencia, lo contrario sucede en los métodos numéricos tradicionales que ven muy perjudicada su convergencia.

$$\mu = \int_0^1 \ldots \int_0^1 g(y_1, y_2, \ldots, y_i) \cdot dy_1, dy_2, \ldots, dy_i$$

Si y_1, y_2, … son variables aleatorias distribuidas uniformemente (0, 1)

$$\mu = E[g(R_1, \ldots, R_i)]$$

Si $R_1^1, \ldots, R_i^1; R_1^2, \ldots R_i^2; R_1^n, \ldots, R_i^n$ son n muestras independientes de estas variables aleatorias entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{g(R_1^j, \ldots R_i^j)}{n} = \mu$$

Ejemplo	Solución simulación	Solución analítica
$\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} x^2 \cdot y \cdot dy \cdot dx$	1,16814105	1,16666666
$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{1}^{2} x \cdot y \cdot z \cdot dz \cdot dy \cdot dx$	-0,02109142	0
$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} x^3 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot dx \cdot d\theta$	-0,00919993	0
$\int_{0}^{\pi}\int_{1}^{2} \left(3 \cdot x \cdot \cos(\theta) + 4 \cdot (x \cdot \sin(\theta))^2\right) \cdot x \cdot dx \cdot d\theta$	23,4791716	23,5619449
$\int_{2}^{3}\int_{0}^{1}\int_{1}^{2}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1} \left(x \cdot y^2 + x \cdot z \cdot r + y \cdot w^2\right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dw \cdot dr$	5,70065516	5,75
$\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} x^2 \cdot dx \cdot dy$	20,0546483	20,5479352

La solución mediante simulación se ha obtenido formalizado con la hoja de cálculo diez réplicas de cuatro mil simulaciones cada una.

Ejemplo 1.9

$$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}(x^2+y^2)\cdot dx\cdot dy$$

Solución mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D
1	2+ALEATORIO()	1+ALEATORIO()	(A1^2)+(B1^2)	PROMEDIO($C$1:C1)

Formalizando con la hoja de cálculo diez réplicas de cuatro mil simulaciones cada una, se ha alcanzado un valor de:

$$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}(x^2+y^2)\cdot dx\cdot dy = 8{,}66705807$$

Siendo la resolución analítica

$$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}(x^2+y^2)\cdot dx\cdot dy = 8{,}66666666$$

1.16 CASO Programación proyecto construcción chalet

El proyecto de un nuevo chalet consta de las siguientes tareas:

- **T1 - Cimientos.**
- **T2 - Paredes.**
- **T3 - Cubierta.**
- **T4 - Instalación sanitaria.**
- **T5 - Instalación eléctrica.**
- **T6 - Cerramientos.**
- **T7 - Pintura.**
- **T8 - Limpieza final.**

La duración de cada una de las cuales sigue una distribución triangular cuyos parámetros recoge la tabla siguiente.

	DURACIÓN en horas		
	Pesimista	**Más Probable**	**Optimista**
T1 - Cimientos	50	38	30
T2 - Paredes	60	46	40
T3 - Cubierta	32	21	16
T4 - Instalación sanitaria	16	12	10
T5 - Instalación eléctrica	18	13	12
T6 - Cerramientos	10	7	6
T7 - Pintura	26	22	20
T8 - Limpieza final	9	6	5

Por su parte, las relaciones de dependencia que implican que una tarea no puede comenzar hasta haberse terminado otra previa, se muestran en la tabla.

Tarea	Sigue a la tarea
T1 - Cimientos	
T2 - Paredes	T1 - Cimientos
T3 - Cubierta	T2 - Paredes
T4 - Instalación sanitaria	T2 - Paredes
T5 - Instalación eléctrica	T3 - Cubierta y T4 - Instalación sanitaria
T6 - Cerramientos	T3 - Cubierta y T4 - Instalación sanitaria
T7 - Pintura	T5 - Instalación eléctrica
T8 - Limpieza final	T6 - Cerramientos y T7 - Pintura

Estime el tiempo total necesario para finalizar la obra.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Duración de cada tarea (T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7 y T8)

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable.

La duración de cada tarea sigue una distribución triangular cuyos parámetros recoge la tabla.

	DURACIÓN en horas		
	Pesimista	**Más Probable**	**Optimista**
T1 - Cimientos	50	38	30
T2 - Paredes	60	46	40
T3 - Cubierta	32	21	16
T4 - Instalación sanitaria	16	12	10
T5 - Instalación eléctrica	18	13	12
T6 - Cerramientos	10	7	6
T7 - Pintura	26	22	20
T8 - Limpieza final	9	6	5

PASO 3. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

0,9025	0,8640	0,5489	0,5820	0,1865	0,8191	0,1558	0,6483

PASO 4. Simule el tiempo total necesario para finalizar la obra.

R - T1	D - T1	A	R - T2	D - T2	B	R - T3	D - T3	C
0,9025	45,16	45,16	0,8640	53,83	98,99	0,5489	23,09	122,08

R - T4	D - T4	D	R - T5	D - T5	E	R - T6	D - T6	F
0,5820	12,83	111,82	0,1865	13,06	135,14	0,8191	8,53	130,61

R - T7	D - T7	G	R - T8	D - T8	H	P
0,1558	21,37	156,51	0,6483	6,95	163,46	163,46

R - Ti → Número Aleatorio correspondiente a la tarea Ti

D - Ti → Duración de la tarea Ti en horas

$A = D_{T1}$ $B = A + D_{T2}$

$C = B + D_{T3}$ $D = B + D_{T4}$

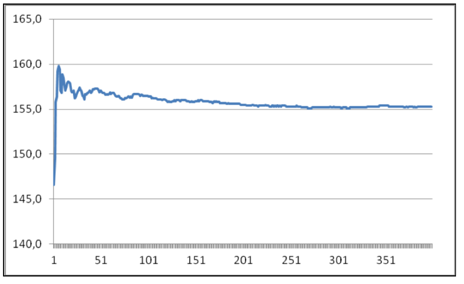
$E = MAX(C;D) + D_{T5}$ $F = MAX(C;D) + D_{T6}$

$G = E + D_{T7}$ $H = MAX(F;G) + D_{T8}$

El tiempo total necesario para finalizar la obra es de 163,46 horas.

PASO 5. Obtenga la gráfica de estabilización que muestra que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que simulando 400 ejecuciones del proyecto con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del tiempo total necesario para finalizar la obra.

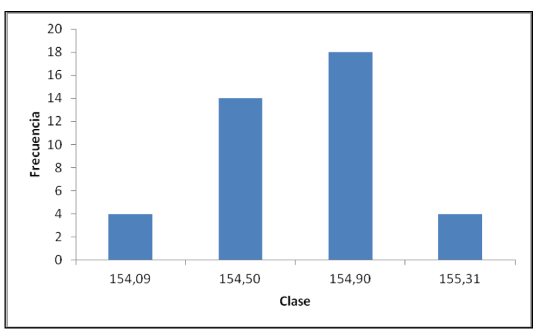


Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

PASO 6. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del tiempo total necesario para finalizar la obra:

155,0	154,8	154,5	154,1	154,7
154,3	154,4	154,2	154,9	155,0
154,8	154,9	154,7	154,9	154,2
154,4	155,1	154,7	155,0	155,5
153,7	154,9	155,1	154,7	154,9
154,4	154,6	155,5	154,9	154,5
155,6	154,1	154,5	155,2	154,6
154,8	154,3	154,7	154,5	154,4



PASO 7. Calcule el tiempo total necesario para finalizar la obra y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 154{,}7 \text{ horas} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}40 \text{ horas}$$

PASO 8. Halle el intervalo de confianza del tiempo total necesario para finalizar la obra con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$153{,}9 \leq \mu \leq 155{,}5$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el tiempo total necesario para finalizar la obra en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 153,9 y 155,5 horas.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Pesimista	Más probable	Optimista		Cociente			
2	T1	50	38	30		0,4000			
3	T2	60	46	40		0,3000			
4	T3	32	21	16		0,3125			
5	T4	16	12	10		0,3333			
6	T5	18	13	12		0,1667			
7	T6	10	7	6		0,2500			
8	T7	26	22	20		0,3333			
9	T8	9	6	5		0,2500			
10									
11	R - T1	D - T1	A	R - T2	D - T2	B	R - T3	D - T3	C
12	0,87	44,41	44,41	0,17	44,52	88,93	0,48	22,43	111,36

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11	R - T4	D - T4	D	R - T5	D - T5	E	R - T6	D - T6	F
12	0,20	11,55	100,48	0,58	14,45	125,81	0,03	6,35	117,71

	S	T	U	V	W	X	Y
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11	**R - T7**	**D - T7**	**G**	**R - T8**	**D - T8**	**H**	**Promedio**
12	0,16	21,39	147,20	0,43	6,38	153,58	153,58

<u>Cociente</u> $\frac{b-a}{c-a}$

Casilla F2 → ($C2-$D2)/ ($B2-$D2)

Arrastre hacia abajo casilla F2 hasta casilla F9

<u>Número Aleatorio correspondiente a la Tarea i</u> (R -T_i)

Casillas A12, D12, G12, J12, M12, P12, S12, y V12

REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>Duración de la Tarea i</u> (D -T_i)

Casilla B12

SI(A12>$F$2;

B$2-RAIZ(($B$2-$C$2)*($B$2-$D$2)*(1-A12));

$D$2+RAIZ(($B$2-$D$2)*($C$2-$D$2)*A12))

Casilla E12

SI(D12>$F$3;

$B$3-RAIZ(($B$3-$C$3)*($B$3-$D$3)*(1-D12));

$D$3+RAIZ(($B$3-$D$3)*($C$3-$D$3)*D12))

Casilla H12

SI(G12>$F$4;

$B$4-RAIZ(($B$4-$C$4)*($B$4-$D$4)*(1-G12));

$D$4+RAIZ(($B$4-$D$4)*($C$4-$D$4)*G12))

Casilla K12

SI(J12>$F$5;

$B$5-RAIZ(($B$5-$C$5)*($B$5-$D$5)*(1-J12));

$D$5+RAIZ(($B$5-$D$5)*($C$5-$D$5)*J12))

Casilla N12

SI(M12>$F$6;

$B$6-RAIZ(($B$6-$C$6)*($B$6-$D$6)*(1-M12));

$D$6+RAIZ(($B$6-$D$6)*($C$6-$D$6)*M12))

Casilla Q12

SI(P12>$F$7;

$B$7-RAIZ(($B$7-$C$7)*($B$7-$D$7)*(1-P12));

$D$7+RAIZ(($B$7-$D$7)*($C$7-$D$7)*P12))

Casilla T12

SI(S12>$F$8;

$B$8-RAIZ(($B$8-$C$8)*($B$8-$D$8)*(1-S12));

$D$8+RAIZ(($B$8-$D$8)*($C$8-$D$8)*S12))

Casilla W12

SI(V12>$F$9;

$B$9-RAIZ(($B$9-$C$9)*($B$9-$D$9)*(1-V12));

$D$9+RAIZ(($B$9-$D$9)*($C$9-$D$9)*V12))

<u>A</u> (D_{T1})

Casilla C12 → B12

<u>B</u> (A + D_{T2})

Casilla F12 → C12+E12

<u>C</u> (B + D_{T3})

Casilla I12 → F12+H12

<u>D</u> (B + D_{T4})

Casilla L12 → F12+K12

<u>E</u> (MÁX(C;D) + D_{T5})

Casilla O12 → MÁX(**I**12;L12)+N12

<u>F</u> (MÁX(C;D) + D_{T6})

Casilla R12 → MÁX(**I**12;L12)+Q12

<u>G</u> (E + D_{T7})

Casilla U12 → O12+T12

<u>H</u> (MÁX(F;G) + D_{T8})

Casilla X12 → MÁX(R12;U12)+W12

<u>Promedio</u>

Casilla Y12 → REDONDEAR(PROMEDIO($X$12:X12);1)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como iteraciones desee realizar.

1.17 CASO Lanzamiento de un nuevo producto

Una empresa ha desarrollado un nuevo producto. El precio de venta unitario del nuevo producto se ha fijado en 6.000 euros. Los costes administrativos se estiman que asciendan a 2.500.000 de euros y los gastos de publicidad del primer año a 3.500.000 de euros. El coste de los componentes se considera que seguirá una distribución uniforme entre 3.000 y 4.000 euros por unidad, y el coste de la mano de obra directa se recoge en la tabla siguiente.

Coste unitario mano de obra	1.500	1.900	2.200	2.600	3.000
f(x)	5 %	35 %	30 %	25 %	5 %

La demanda del primer año se prevé siga una distribución normal de media 20.000 unidades y desviación estándar 5.000 unidades. Estime el beneficio esperado el primer año de lanzamiento del nuevo producto.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Coste de los componentes.

Coste de la mano de obra directa.

Demanda del nuevo producto.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable.

El coste de los componentes sigue una distribución uniforme entre 3.000 y 4.000 euros por unidad.

Coste unitario mano de obra	**1.500**	**1.900**	**2.200**	**2.600**	**3.000**
f(x)	0,05	0,35	0,30	0,25	0,05

La demanda sigue una distribución normal de media 20.000 unidades y desviación estándar 5.000 unidades.

PASO 3. Enumere la distribución acumulada de probabilidad de cada variable.

El coste de los componentes sigue una distribución uniforme entre 3.000 y 4.000 euros por unidad.

Coste unitario mano de obra	1.500	1.900	2.200	2.600	3.000
f(x)	0,05	0,35	0,30	0,25	0,05
F(x)	0,05	0,40	0,70	0,95	1,00

La demanda sigue una distribución normal de media 20.000 unidades y desviación estándar 5.000 unidades.

PASO 4. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de cada una de las variables.

Coste unitario mano de obra	1.500	1.900	2.200	2.600	3.000
f(x)	0,05	0,35	0,30	0,25	0,05
F(x)	0,05	0,40	0,70	0,95	1,00
Intervalos	0,00 a 0,04	0,05 a 0,39	0,40 a 0,69	0,70 a 0,94	0,95 a 1,00

PASO 5. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Coste Mano de Obra	0,06	0,28	0,21	0,87	0,79	0,99	0,87	0,36	0,57	0,83
Coste componentes	0,78	0,08	0,82	0,20	0,22	0,76	0,39	0,08	0,42	0,51
Demanda primer año	0,52	0,19	0,22	0,70	0,20	0,31	0,03	0,84	0,30	0,13

PASO 6. Simule el beneficio esperado con el lanzamiento del nuevo producto.

A	Coste MO	A	Coste piezas	A	Demanda	Beneficio	Promedio
0,06	1.900	0,78	3.780	0,52	20.251	480.320	480.320

Coste componentes $= a + (b - a) \cdot R = 3000 + (4000 - 3000) \cdot 0{,}78 = 3.780$ euros

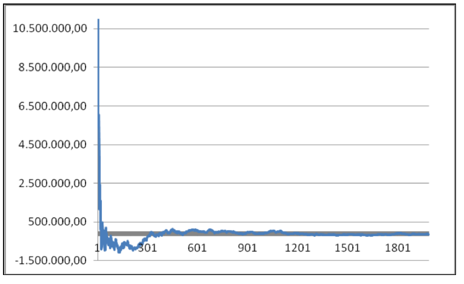
$$\text{Demanda} = \bar{x} + z \cdot \sigma = 20000 + z \cdot 5000 = 20.251 \text{ unidades}$$

<u>**Beneficio**</u> = (Precio unitario de venta - Coste unitario de mano de obra - Coste unitario de los componentes) x Demanda - Costes administrativos - Gastos de publicidad

PASO 7. Obtenga la gráfica de estabilización que muestra que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que simulando 2.000 ejecuciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del beneficio esperado.

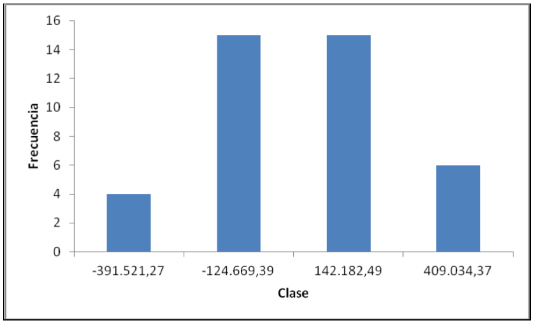
Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.



PASO 8. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del beneficio esperado:

-136.639	-99.604	-742.489	-581.956	609.048
-77.005	-266.354	228.819	123.406	357.866
26.620	52.227	-175.768	387.544	217.976
-251.515	147.671	-170.254	-91.642	-88.047
-128.603	344.645	-253.708	201.011	24.626
199.905	342.824	-76.079	-356.762	-186.296
-97.193	176.222	107.663	31.723	-128.953
-155.085	134.202	157.374	326.815	216.027



PASO 9. Calcule el beneficio esperado y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 8.756{,}55 \text{ euros} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 266.851{,}87 \text{ euros}$$

PASO 10. Halle el intervalo de confianza del beneficio esperado con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$-514.263{,}5 \leq \mu \leq 531.776{,}6$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el beneficio esperado el primer año de lanzamiento del nuevo producto en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre - 514.263,5 y 531.776,6 euros.

Dado que la probabilidad de pérdida es del 47,5% y que la desviación estándar del beneficio es muy elevada, no procedería el lanzamiento al mercado del nuevo producto.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Coste MO**	**f(x)**	**F(x)**	**Límite inferior intervalo**	**Límite superior intervalo**	**Coste MO**		
2	1.500	0,05	0,05	0,00	0,04	1.500		
3	1.900	0,35	0,40	0,05	0,39	1.900		
4	2.200	0,30	0,70	0,40	0,69	2.200		
5	2.600	0,25	0,95	0,70	0,94	2.600		
6	3.000	0,05	1,00	0,95	1,00	3.000		
7								
8	**Distribución coste componentes**			a =	3.000		b =	4.000
9	**Distribución demanda primer año**			μ =	20.000		σ =	5.000
10								
11	**Precio de venta unitario**			6.000	euros			
12	**Costes administrativos**			2.500.000	euros			
13	**Gastos publicidad primer año**			3.500.000	euros			
14	**Número aleatorio**	**Coste MO**	**Número aleatorio**	**Coste piezas**	**Número aleatorio**	**Demanda**	**Beneficio euros**	**Beneficio promedio**
15	0,06	1.900	0,78	3.780	0,52	20.251	480.320	480.320,00
16	0,28	1.900	0,08	3.080	0,19	15.611	9.923.220	5.201.770,00
17	0,21	1.900	0,82	3.820	0,22	16.139	-1.481.080	2.974.153,33
18	0,87	2.600	0,20	3.200	0,70	22.622	-1.475.600	1.861.715,00
19	0,79	2.600	0,22	3.220	0,20	15.792	-3.157.440	857.884,00
20	0,99	3.000	0,76	3.760	0,31	17.521	- 19. 315.960	-2.504.423,33
21	0,87	2.600	0,39	3.390	0,03	10.596	-5.894.040	-2.988.654,29
22	0,36	1.900	0,08	3.080	0,84	24.972	19.471.440	-181.142,50
23	0,57	2.200	0,42	3.420	0,30	17.378	603.640	-93.944,44
24	0,83	2.600	0,51	3.510	0,13	14.368	-7.580.480	-842.598,00

Número aleatorio

Casillas A15, C15 y E15 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Coste de la Mano de Obra

Casilla B15 → BUSCARV(A15;$D$2:$F$6;3)

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → BUSCARV(ALEATORIO();$D$2:$F$6;3)

Coste de los componentes

Casilla D15 → $E$8+(($H$8-$E$8)*C15)

Demanda

Casilla F15 → REDONDEAR(DISTR.NORM.INV(E15;$E$9;$H$9);0)

Beneficio euros

G15 → (($D$11-B15-D15)*F15)-$D$12-$D$13

Beneficio promedio

Casilla H15 → PROMEDIO($G$15:G15)

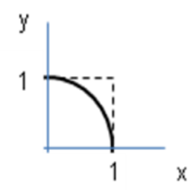
Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

1.18 CASO Cálculo de áreas

Halle el área de un círculo de un centímetro de radio.

SOLUCIÓN

PASO 1. Elija una envolvente, en este caso se elige un cuadrado de dos centímetros de lado.



PASO 2. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Coordenada x	0,06	0,28	0,21	0,87	0,79	0,99
Coordenada y	0,78	0,08	0,82	0,20	0,22	0,76

PASO 3. Sí ($x^2 + y^2$) < 1 el punto (x, y) se encuentra dentro del círculo, en caso contrario el punto se encuentra dentro del cuadrado y fuera del círculo.

X	Y	$x^2 + y^2$	< 1
0,06	0,78	0,6120	1
0,28	0,08	0,0848	1
0,21	0,82	0,7165	1
0,87	0,20	0,7969	1
0,79	0,22	0,6725	1
0,99	0,76	1,5577	0

1 → El punto se encuentra dentro del círculo
2 → El punto se encuentra dendro del cuadrado y fuera del círculo

PASO 4. La probabilidad de colocar un punto dentro del círculo:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área del cuadrado}}$$

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Nº puntos que quedaron dentro del círculo}}{\text{Nº puntos colocados dentro del cuadrado}}$$

De donde:

$$\text{Área del círculo} = \frac{\text{Nº puntos que quedaron dentro del círculo}}{\text{Nº puntos colocados dentro del cuadrado}} \times \text{Área del cuadrado}$$

Siendo el lado del cuadrado igual a (2 x radio del círculo), su área es exactamente (4 x radio^2), luego:

$$\text{Área del círculo} = \frac{\text{Nº puntos que quedaron dentro del círculo}}{\text{Nº puntos colocados dentro del cuadrado}} \times (4 \cdot r^2)$$

Y si el radio del círculo es de un centímetro:

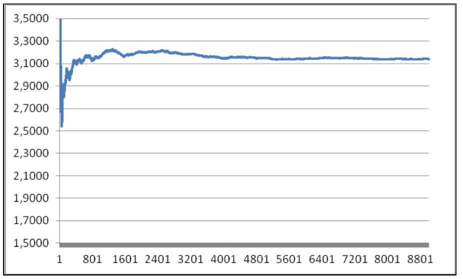
$$\text{Área del círculo} = \frac{\text{Nº puntos que quedaron dentro del círculo}}{\text{Nº puntos colocados dentro del cuadrado}} \times 4$$

X	Y	$x^2 + y^2$	< 1	Promedio x 4
0,06	0,78	0,6120	1	4,00
0,28	0,08	0,0848	1	4,00
0,21	0,82	0,7165	1	4,00
0,87	0,20	0,7969	1	4,00
0,79	0,22	0,6725	1	4,00
0,99	0,76	1,5577	0	3,33

PASO 5. Obtenga la gráfica de estabilización que muestra que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que simulando 9.000 ejecuciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del área del círculo.

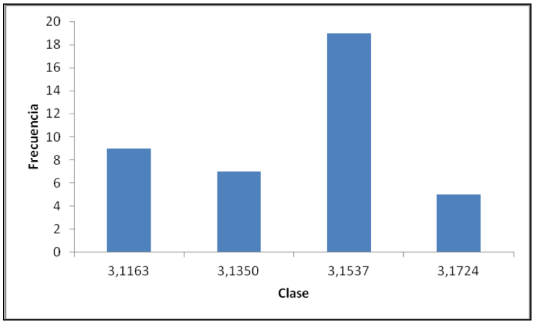
Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.



PASO 6. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del área del círculo:

3,1360	3,1538	3,1604	3,1458	3,1244
3,1613	3,1502	3,1693	3,1418	3,1444
3,1524	3,1138	3,1551	3,1280	3,1293
3,1547	3,1107	3,1462	3,1400	3,1778
3,1507	3,1569	3,1524	3,1249	3,1538
3,1573	3,1476	3,1547	3,1791	3,1631
3,1164	3,1147	3,1542	3,1333	3,1778
3,1200	3,1156	3,1236	3,1520	3,1276



PASO 7. Calcule el área del círculo y su desviación estándar.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 3{,}1443 \text{ cm}^2 \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}0186 \text{ cm}^2$$

PASO 8. Halle el intervalo de confianza del área del círculo con un nivel de aceptación del 95%.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$3{,}1078 \leq \mu \leq 3{,}1808$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el área del círculo en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 3,1078 y 3,1808 cm^2.

En este caso particular la resolución analítica resulta muchos menos costosa toda vez que proporciona la solución óptima:

$$\text{Área del círculo} = \pi \cdot \text{radio}^2 = 3{,}141592654 \times 1^2 = 3{,}141592654 \text{ cm}^2$$

Sin embargo, si requiere determinar el área de una forma irregular, inevitablemente debe aplicar un método numérico.

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D
1	**Número aleatorio**	**Número aleatorio**	**< 1**	**Promedio x 4**
2	0,06	0,78	1	4,00
3	0,28	0,08	1	4,00
4	0,21	0,82	1	4,00
5	0,87	0,20	1	4,00
6	0,79	0,22	1	4,00
7	0,99	0,76	0	3,33

<u>Número aleatorio</u>

Casilla A2 y B2 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

<u>¿El punto se encuentra dentro del círculo?</u>

Casilla C2 → SI(((A1*A1)+ (B1*B1))<1;1;0)

<u>Área del círculo = Promedio x 4</u>

Casilla D2 → (PROMEDIO($C$1:C1))*4

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

1.19 CASO Cola Finita

A un sistema de un único canal llegan clientes a una tasa de 3 por hora según un proceso Poisson. La duración promedio del servicio es de 15 minutos siguiendo una distribución exponencial. Determine la longitud promedio de la cola y el tiempo promedio de permanencia de un cliente en el sistema, conociendo que la capacidad del sistema está limitada a 3 clientes.

SOLUCIÓN

PASO 1. Defina las variables que intervienen en el modelo.

Las llegadas de clientes a la línea de espera.

El tiempo de servicio.

PASO 2. Formule la distribución de probabilidad de cada variable a partir de los datos históricos.

El tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial con media 0,3333 horas/cliente y el tiempo de servicio una distribución exponencial con media 0,25 horas/cliente.

PASO 3. Genere números aleatorios.

Mediante la función ALEATORIO() de la hoja de cálculo se han generado los números aleatorios

Tiempo entre llegadas	0,63	0,69	0,22	0,85	0,48	0,13
Tiempo de servicio	0,71	0,03	0,44	0,14	0,69	0,30

PASO 4. Simule el funcionamiento del sistema.

Cliente	R	TL	PL	Sistema	HEC	HSC	R	DS	HS	Mayor HS	NC	N	NS	W
0														
1	0,63	0,15	0,15		0,15	0,15	0,71	0,09	0,24	0,24	0	0	0	0,09
2	0,69	0,12	0,27		0,27	0,27	0,03	0,88	1,15	1,15	0	0	0	0,88
3	0,22	0,50	0,77		0,77	1,15	0,44	0,21	1,36	1,36	0	1	1	0,59
4	0,85	0,05	0,82		0,82	1,36	0,14	0,49	1,85	1,85	1	1	2	1,03
5	0,48	0,24	1,06	LLENO						1,85	2	1	3	
6	0,13	0,68	1,74		1,74	1,85	0,69	0,09	1,94	1,94	0	1	1	0,20

R	→	Número Aleatorio	TL	→	Tiempo entre llegadas
PL	→	Próxima llegada	HEC	→	Hora de entrada en la cola
HSC	→	Hora de salida de la cola	DS	→	Duración del servicio
HS	→	Hora de salida del servicio	NC	→	Número de clientes en la cola
N	→	Número de clientes en servicio	NS	→	Número de clientes en el sistema
W		Tiempo en el sistema			

<u>Tiempo entre llegadas</u> (TL) cliente i = $-\frac{\ln R}{\lambda}$

Tiempo entre llegadas cliente 1 = $-\frac{\ln R}{3} = -\frac{\ln 0,63}{3} = 0,92$

<u>Próxima Llegada</u> (PL) cliente i = Tiempo entre llegadas (TL) cliente i + Próxima llegada (PL) cliente (i - 1)

$$PL_1 = TL_1 + PL_0 = 0{,}15 + 0 = 0{,}15$$
$$PL_2 = TL_2 + PL_1 = 0{,}12 + 0{,}15 = 0{,}27$$

<u>Sistema</u>

Si Número de clientes en el sistema (NS) < 3 →

No se ha alcanzado la capacidad máxima del sistema;

en otro caso

LLENO (Se ha alcanzado la capacidad máxima de 3 clientes).

<u>Hora de entrada en la cola</u> (HEC) cliente i

Si no se ha alcanzado la capacidad máxima del sistema →

HEC cliente i = PL cliente i

<u>Hora de salida de la cola</u> (HSC) cliente i

Si no se ha alcanzado la capacidad máxima del sistema →

HSC cliente i = Mayor de los dos valores siguientes:

- Hora de entrada en la cola (HEC) cliente i
- Mayor hora de salida del servicio (HS) cliente (i - 1)

<u>Duración del servicio</u> (DS) cliente i = $-\frac{\ln R}{\lambda}$

Si no se ha alcanzado la capacidad máxima del sistema →

Duración del servicio del cliente 1 = $-\frac{\ln R}{4} = -\frac{\ln 0{,}71}{4} = 0{,}09$

<u>Hora de salida del servicio</u> (HS) cliente i

Si no se ha alcanzado la capacidad máxima del sistema →

HS cliente i = Hora de salida de la cola (HSC) cliente i + Duración del servicio (DS) cliente i

$$HS_1 = HSC_1 + DS_1 = 0{,}15 + 0{,}09 = 0{,}24$$

$$HS_2 = HSC_2 + DS_2 = 0{,}27 + 0{,}88 = 1{,}15$$

<u>MAYOR Hora de salida del servicio</u> (Mayor HS) cliente i = Mayor (HS cliente 1; HS cliente 2; HS cliente 3; …; HS cliente i)

<u>Número de clientes en la cola</u> (NC) cliente i

Contar cuantos clientes anteriores al cliente i tienen su Hora de salida de la cola (HSC) > Próxima llegada (PL) cliente i

<u>Número de clientes en el servicio</u> (N) cliente i

1. Contar cuantos clientes anteriores al cliente i tienen su Hora de salida de la cola (HSC) < Próxima llegada (PL) cliente i
2. Contar cuantos clientes anteriores al cliente i tienen su Hora de salida del servicio (HS) < Próxima llegada (PL) cliente i
3. Restar ambos valores (1 - 2)

<u>Número de clientes en el sistema</u> (NS) cliente i = Número de clientes en el servicio (N) cliente i + Número de clientes en la cola (NC) cliente i

<u>Tiempo de permanencia en el sistema</u> (W) cliente i

Si no se ha alcanzado la capacidad máxima del sistema → W cliente i = Hora de salida del servicio (HS) cliente i - Próxima llegada (PL) cliente i

$$W_1 = HS_1 - PL_1 = 0{,}24 - 0{,}15 = 0{,}09$$
$$W_2 = HS_2 - PL_2 = 1{,}15 - 0{,}27 = 0{,}88$$

De donde, el tiempo promedio de permanencia en el sistema y la longitud promedio de la cola:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i}{n} = \frac{2{,}79}{5} = 0{,}558 \text{ horas}$$

$$L_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} NC_i}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

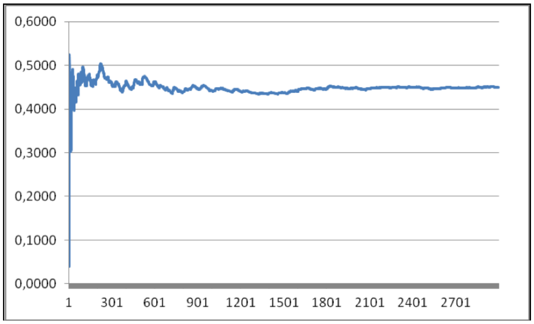
L → Número promedio de clientes en el sistema

L_q → Número promedio de clientes en cola esperando servicio

PASO 5. Obtenga la gráfica de estabilización que muestra que el tamaño de muestra utilizado es suficiente para garantizar la convergencia del resultado.

Vea en la gráfica que simulando 3.000 ejecuciones con la hoja de cálculo alcanza la estabilización del tiempo promedio de permanencia en el sistema.

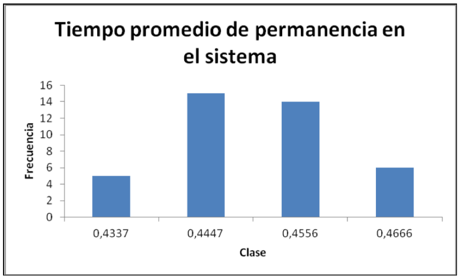
Si bien la estabilización está garantizada, diferentes repeticiones del modelo darán lugar a resultados distintos.

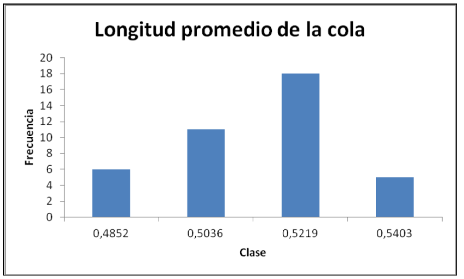


PASO 6. Replique el modelo.

Mediante la hoja de cálculo se ha replicado el modelo cuarenta veces obteniendo los siguientes valores del tiempo promedio de permanencia en el sistema en horas:

W	0,4240	0,4493	0,4430	0,4323	0,4441
L_q	0,4553	0,5290	0,4990	0,4833	0,5187
W	0,4622	0,4650	0,4556	0,4462	0,4546
L_q	0,5100	0,5257	0,5243	0,5123	0,4937
W	0,4577	0,4335	0,4525	0,4536	0,4419
L_q	0,5143	0,4890	0,5330	0,5067	0,5180
W	0,4448	0,4594	0,4423	0,4562	0,4582
L_q	0,5290	0,5397	0,4937	0,5287	0,5150
W	0,4427	0,4540	0,4487	0,4465	0,4564
L_q	0,5077	0,5297	0,5130	0,5100	0,5240
W	0,4510	0,4527	0,4342	0,4514	0,4467
L_q	0,5157	0,4980	0,5013	0,5277	0,5130
W	0,4621	0,4491	0,4591	0,4632	0,4632
L_q	0,5347	0,5040	0,5343	0,5220	0,5343
W	0,4819	0,4438	0,4463	0,4455	0,4312
L_q	0,5283	0,5117	0,4997	0,5143	0,4673





PASO 7. Calcule el tiempo promedio de permanencia en el sistema así como la longitud promedio de la cola y su desviación estándar.

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0{,}4501525 \text{ horas} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}010892364 \text{ horas}$$

$$L_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0{,}5127275 \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}01830194$$

PASO 8. Halle el intervalo de confianza del tiempo promedio de permanencia en el sistema y de la longitud promedio de la cola con un nivel de aceptación del 95%.

$$W - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq W + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0{,}4288 \leq \mu \leq 0{,}4715$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, el tiempo promedio de permanencia en el sistema en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 0,4288 y 0,4715 horas.

$$L_q - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq L_q + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0{,}4769 \leq \mu \leq 0{,}5486$$

Si realiza cien repeticiones del modelo, la longitud promedio de la cola en el 95% de las mismas espera que se encuentre entre 0,4769 y 0,5486.

Siendo la solución analítica:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{1-0{,}75}{1-0{,}75^4} = 0{,}36571429$$

$$P_3 = \rho^n \cdot P_0 = 075^3 \times 0{,}36571429 = 0{,}15428571$$

$$L = \frac{\rho \cdot \left(1-(k+1)\cdot\rho^k + k\cdot\rho^{k+1}\right)}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{k+1})} = \frac{0{,}75 \times \left(1 - 4 \times 0{,}75^3 + 3 \times 0{,}75^4\right)}{(1-0{,}75)\times(1-0{,}75^4)} = 1{,}14857143$$

$$L_q = L - (1-P_0) = 1{,}14857143 - (1-0{,}36571429) = 0{,}51428572$$

$$W = \frac{L_q}{\lambda \cdot (1-P_k)} + \frac{1}{\mu} = \frac{0{,}051428572}{3 \times (1-0{,}15428571)} + \frac{1}{4} = 0{,}4527027039 \text{ horas}$$

SOLUCIÓN mediante HOJA de CÁLCULO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	K=	3								
2	Cliente	R	TL	PL	Sistema	HEC	HSC	R	DS	HS
3	0									
4	1	0,63	0,15	0,15		0,15	0,15	0,71	0,09	0,24
5	2	0,69	0,12	0,27		0,27	0,27	0,03	0,88	1,15
6	3	0,22	0,50	0,77		0,77	1,15	0,44	0,21	1,36
7	4	0,85	0,05	0,82		0,82	1,36	0,14	0,49	1,85

	A	K	L	M	N	O	P	Q
1							Promedio	
2	Cliente	Mayor HS	NC	N	NS	W	W	L_q
3	0							
4	1	0,24	0	0	0	0,09	0,09	0,00
5	2	1,15	0	0	0	0,88	0,49	0,00
6	3	1,36	0	1	1	0,59	0,52	0,00
7	4	1,85	1	1	2	1,03	0,65	0,25

TL → Tiempo entre llegadas

PL → Próxima llegada

HEC → Hora de entrada en la cola

HSC → Hora de salida de la cola

DS → Duración del servicio

HS → Hora de salida del servicio

NC → Número de clientes en la cola

N → Número de clientes en servicio

NS → Número de clientes en sistema

W → Tiempo permanencia en sistema

Número aleatorio (R)

Casillas B4 y H4 → REDONDEAR(ALEATORIO();2)

Tiempo entre llegadas (TL)

Casilla C4 → (1/3)*(LN(1/B4))

Las dos casillas anteriores pueden juntarse en una sola casilla con la fórmula → (1/3)*(LN(1/REDONDEAR(ALEATORIO();2)))

Próxima llegada (PL)

Casilla D4 → D3+C4

Sistema

Casilla E4 → SI(N4<$B$1;" ";"LLENO")

Hora de entrada en la cola (HEC)

Casilla F4 → SI(E4=" ";D4;" ")

Hora de salida de la cola (HSC)

Casilla G4 → SI(E4=" ";MAX(F4;K3);" ")

Duración del servicio (DS)

Casilla I4 → REDONDEAR((1/4)*(LN(1/H4));2)

Hora de salida del servicio (HS)

Casilla J4 → SI(E4=" "; G4+I4;" ")

Mayor HS

Casilla K4 → MAX($J$4:J4)

Número de clientes en la cola (NC)

Casilla L4 → CONTAR.SI($G$3:G3;">"&D4)

Número de clientes en el servicio (N)

Casilla M4 →

CONTAR.SI($G$3:G3;"<"&D4)-CONTAR.SI($J$3:J3;"<"&D4)

<u>Número de clientes en el sistema</u> (NS)

Casilla N4 → L4+M4

<u>Tiempo promedio de permanencia en el sistema</u> (W)

Casilla O4 → SI(E4=" "; J4-D4;" ")

<u>Promedio del tiempo de permanencia en el sistema</u> (Promedio W)

Casilla P4 → PROMEDIO($O$4:O4)

<u>Promedio del número de clientes en cola</u> (Promedio W)

Casilla Q4 → PROMEDIO($L$4:L4)

Arrastre hacia abajo tantas casillas como simulaciones desee realizar.

1.20 Desarrollo del método Monte Carlo con hoja de cálculo

Si bien existe una gran diversidad de programas que incluyen utilidades del método Monte Carlo (Maple, Mathcad, Mathematica, Matlab, Minitab, etc.), en el texto se ha tratado de destacar las enormes ventajas que ofrecen las hojas de cálculo para realizar simulaciones: accesibilidad dada la amplia difusión de las mismas, universalidad, simplicidad de manejo, capacidad de recalcular valores, análisis de escenarios, y bajo coste. Cabe resaltar que no se han utilizado todas las potencialidades que ofrecen las hojas de cálculo, de forma que cualquier lector, desde el más hasta el menos avezado con las hojas de cálculo pueda experimentar a priori las posibles consecuencias de sus decisiones. Los lectores más ejercitados con las hojas de cálculo deberían emplear las opciones de ***análisis de datos*** incluidas en las hojas de cálculo, en especial el complemento ***generación de números aleatorios,*** que permite generar de forma automática números pseudoaleatorios para distintos tipos de distribuciones de probabilidad (discreta, uniforme, normal, Bernoulli, binomial y Poisson). En el caso de requerir funciones no contenidas en la hoja de cálculo, existen en el mercado complementos para el análisis de decisiones tales como @RISK, Crystal Ball, Insight.xla y simtools.xla.

2 Generación de números pseudoaleatorios

En matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.

John Von Neumann

Los experimentos de simulación requieren reproducir el comportamiento de variables aleatorias con funciones de probabilidad cualesquiera, proceso que se lleva a cabo a partir de la generación de muestras de dichas variables, lo que obliga a disponer de un generador de variables aleatorias distribuidas uniformemente (0, 1). En este capítulo se muestran diferentes técnicas para la generación de números aleatorios distribuidos uniformemente (0, 1).

Si bien los mejores métodos para generar números aleatorios son los métodos físicos (ruleta, lanzamiento de monedas o de dados, extracción de bolas de un bombo o de papeletas de un sombrero, etc.), estos procedimientos no resultan aptos para llevar a cabo una simulación mediante ordenador que requiera la generación de cientos de números aleatorios. El método más fiable de generar números aleatorios adaptados al ordenador consiste en utilizar algoritmos deterministas que den lugar a una sucesión de números que se asemeje a la de una sucesión de realizaciones de una variable aleatoria cuya distribución sea una distribución uniforme (0, 1) aunque en realidad no lo sea, a los números así generados se les denomina **números pseudoaleatorios**, dado que pseudo significa falso.

Debido pues a las dificultades que entraña la generación de números realmente aleatorios, se utilizan los números pseudoaleatorios (falsos aleatorios), números generados mediante un procedimiento determinista (no aleatorio) que produce números con características muy similares a los números aleatorios. El funcionamiento de un generador de números pseudoaleatorios arranca de una semilla inicial X_0 y genera una secuencia de valores X_i mediante una relación de recurrencia. Cada uno de estos valores X_i produce un número pseudoaleatorio R_i. Al ser finita la secuencia, la sucesión de estados será periódica, en algún momento $x_i = x_j$ para algún $i > j$. El **periodo o longitud del ciclo del generador** es el menor número entero positivo p que cumple que $x_{i+p} = x_i$. Basta que se repita un valor de X_i para que todo se repita cíclicamente. Es decir, p es el número de números pseudoaleatorios distintos que el generador es capaz de engendrar antes de entrar en un ciclo.

La sucesión de números pseudoaleatorios generada debe cumplir las siguientes propiedades:

- Tener un **periodo suficientemente grande** para poder simular varias réplicas cada una de ellas con números pseudoaleatorios diferentes.
- Ser una sucesión de realizaciones **estadísticamente independientes**.
- Ajustarse a una sucesión de realizaciones de una variable aleatoria que siga una **distribución uniforme** (0, 1).
- Ser **reproducible**, es decir, arrancando con las mismas condiciones iniciales debe ser capaz de reproducir siempre la misma sucesión de números pseudoaleatorios. Lo que permite simular diferentes escenarios sometidos exactamente a las mismas condiciones, resultando un análisis mucho más preciso.

Una vez generado el conjunto de números pseudoaleatorios es preciso someterlo a pruebas estadísticas que determinen si cumple dichas propiedades, dado que el incumplimiento de las mismas conduce a anomalías tales como:

- Media del conjunto por encima o por debajo de 0,5.
- Varianza del conjunto muy alta o muy baja.
- Números generados sean discretos en lugar de continuos.
- Números seguidos en forma ascendente o descendente.
- Números seguidos por encima o por debajo de la media.
- Secuencia de números por encima de la media seguida de una secuencia por debajo de la media.

Se define un **generador de números aleatorios** como una función que devuelve una secuencia de números reales $R_i \in (0, 1)$. Al primer elemento de la serie se le denomina semilla dado que a partir de dicho valor se genera el resto de la secuencia.

2.1 Generadores congruenciales lineales

$$x \equiv y \mod (m)$$

Dos números x e y son congruentes módulo m sí x e y dan el mismo residuo al dividirlos por m, es decir, sí x – y es divisible por m.

Ejemplo 2.1

El número 1.013 es congruente con el número 13 módulo 100.

Solución

x – y = 1.013 – 13 = 1.000   es divisible por 100.

O bien:

Residuo de dividir 1.013 entre 100 = 13

Residuo de dividir 13 entre 100 = 13

Luego el número 1.013 y el número 13 son congruentes módulo 100.

Estos generadores, que han sido los más utilizados, fueron desarrollados por Lehmer en 1951 al observar que los residuos de las potencias sucesivas de un número apuntan un comportamiento aleatorio si se eligen convenientemente los parámetros iniciales.

$$X_{i+1} = a^{i+1} \mod (m) \rightarrow X_{i+1} = (a \cdot X_i) \mod m$$

Muchos de los actuales generadores son generalizaciones de la propuesta de Lehmer.

2.1.1 Congruencial Mixto

1. Fije un valor inicial X_0 tal que $0 < X_0 < m$
2. Elija tres números enteros positivos m, a y c tales que a y c sean menores que m
3. Genere una secuencia de números enteros por medio de la siguiente relación de recurrencia:

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i + c) \mod m$$

X_{i+1} es el residuo de dividir $(a \cdot X_i + c)$ entre el módulo

X_0 es la semilla, **a** el multiplicador, **c** la constante aditiva y **m** el módulo, siendo $X_{i+1} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, es decir, m es el máximo número posible de valores distintos que pueden ser generados. La secuencia x_0, x_1, … se repetirá cíclicamente al cabo de un número de pasos, denominado periodo, que será como máximo igual a m. Lograr este máximo requiere que los parámetros X_0, a, c y m satisfagan determinados criterios.

Dado que genera números en el intervalo (0, m), para obtener los números pseudoaleatorios R_i distribuidos uniformemente en el intervalo (0, 1) basta dividir por m.

$$R_i = \frac{X_i}{m}$$

Ejemplo 2.2

Genere cuatro números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) a partir de los parámetros siguientes, semilla 4, multiplicador 5, constante aditiva 7 y módulo 8.

Solución

PASO 1 $\rightarrow$ $X_0 = 4$

PASO 2 $\rightarrow$ $X_{i+1} = (5 \cdot X_i + 7) \mod 8$

PASO 3 $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
X_1 &= (5 \cdot X_0 + 7) \mod 8 = (5 \times 4 + 7) \mod 8 = 3 \\
X_2 &= (5 \cdot X_1 + 7) \mod 8 = (5 \times 3 + 7) \mod 8 = 6 \\
X_3 &= (5 \cdot X_2 + 7) \mod 8 = (5 \times 6 + 7) \mod 8 = 5 \\
X_4 &= (5 \cdot X_3 + 7) \mod 8 = (5 \times 5 + 7) \mod 8 = 0
\end{aligned}$$

Los números pseudoaleatorios generados:

$$R_1 = \frac{3}{8} = 0{,}375 \quad R_2 = \frac{6}{8} = 0{,}750 \quad R_3 = \frac{5}{8} = 0{,}625 \quad R_4 = \frac{0}{8} = 0$$

Una adecuada elección de los parámetros X_0, a, c, m permite obtener un periodo suficientemente grande así como una impredecible sucesión de números como para considerarla aleatoria. Los generadores cuyo periodo p es igual al módulo m se denominan de **periodo completo**. Que un generador sea de periodo completo es independiente de la semilla que utilice, por el contrario en los generadores que no son de periodo completo, la longitud del periodo puede depender de la semilla utilizada. Para que un generador proporcione resultados fiables debe ser de periodo completo, para ello se sugiere seleccionar el módulo $m = 2^d$ siendo d un número entero y la constante aditiva c un número entero impar primo relativo con m, entre otros.

Los inconvenientes principales de este método son que:

- El periodo depende de la selección de los parámetros. Advierta que el periodo máximo que puede conseguir sin repetir la secuencia es de m números. Al ser m la mayor cantidad de números diferentes que puede lograr, debe elegirlo suficientemente grande.
- Selecciones de parámetros que conducen al mismo periodo, unas parecen más aleatorias que otras.

2.1.2 Congruencial Multiplicativo

1. Fije un valor inicial X_0 tal que $0 < X_0 < m$
2. Elija dos números enteros positivos m y a tales que a sea menor que m
3. Genere una secuencia de números enteros por medio de la siguiente relación de recurrencia:

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i) \mod m$$

X_{i+1} es el residuo de dividir $(a \cdot X_i)$ entre el módulo

X_0 es la semilla, **a** el multiplicador y **m** el módulo. Este algoritmo surge del congruencial mixto con c = 0, lo que conlleva realizar menos cálculos. Los números pseudoaleatorios R_i en el intervalo (0, 1) se obtienen a partir de la expresión $R_i = X_i/m$

Ejemplo 2.3

Halle el periodo de un generador de números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) a partir de los parámetros siguientes: semilla 9, multiplicador 11 y módulo 16.

Solución

PASO 1 → $X_0 = 9$

PASO 2 → $X_{i+1} = (11 \cdot X_i) \mod 16$

PASO 3 →

$$X_1 = (11 \cdot X_0) \mod 16 = (11 \times 9) \mod 16 = 3$$
$$X_2 = (11 \cdot X_1) \mod 16 = (11 \times 3) \mod 16 = 1$$
$$X_3 = (11 \cdot X_2) \mod 16 = (11 \times 1) \mod 16 = 11$$
$$X_4 = (11 \cdot X_3) \mod 16 = (11 \times 11) \mod 16 = 9$$

Los números pseudoaleatorios generados:

$$R_1 = \frac{3}{16} = 0{,}1875 \quad R_2 = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \quad R_3 = \frac{11}{16} = 0{,}6875 \quad R_4 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

La secuencia de números creada por este generador toda vez que la semilla sea 9 es la siguiente: 9 - 3 - 1 - 11 - 9. Siempre repetirá esta secuencia, a partir del 9 genera el 3, a partir del 3 el 1, a partir del 1 el 11 y a partir del 11 el 9, de donde el **periodo** de vida de este generador es de 4.

A diferencia del congruencial mixto no puede tener periodo completo m. Si bien, la adecuada elección de los parámetros a y m permite obtener periodo (m - 1), que es casi m, por lo que a los generadores multiplicativos con periodo (m - 1) se les denomina de periodo completo. Se recomienda que la semilla X_0 sea un número entero impar primo relativo con m, y el módulo m una potencia de dos, entre otros. Sin embargo si elige m como una potencia de dos, el periodo máximo será una cuarta parte del módulo, lo que dio lugar a propuestas alternativas más satisfactorias.

Los generadores multiplicativos fueron introducidos antes que los mixtos y son más utilizados en la actualidad.

2.1.3 Congruencial Aditivo

1. Fije una secuencia de n números enteros $X_1, X_2, \ldots, X_n$
2. Elija un número entero positivo m
3. Genere una secuencia de números enteros por medio de la siguiente relación de recurrencia:

$$X_i = (X_{i-1} + X_{i-n}) \mod m$$

X_i es el residuo de dividir $(X_{i-1} + X_{i-n})$ entre el módulo

Los números pseudoaleatorios R_i en el intervalo (0, 1) se obtienen a partir de la ecuación $R_i = X_i / m$

Ejemplo 2.4

Genere cuatro números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) a partir de la secuencia 11, 17, 18, 03, 15 y módulo 20.

Solución

PASO 1 → $X_1 = 11, X_2 = 17, X_3 = 18, X_4 = 03, X_5 = 15$

PASO 2 → módulo 20

PASO 3 →

$$\begin{aligned}
X_6 &= (X_5 + X_1) \mod 20 = (15 + 11) \mod 20 = 6 \\
X_7 &= (X_6 + X_2) \mod 20 = (6 + 17) \mod 20 = 3 \\
X_8 &= (X_7 + X_3) \mod 20 = (3 + 18) \mod 20 = 1 \\
X_9 &= (X_8 + X_4) \mod 20 = (1 + 3) \mod 20 = 4
\end{aligned}$$

Los números pseudoaleatorios generados:

$$R_1 = \frac{6}{20} = 0{,}30 \quad R_2 = \frac{3}{20} = 0{,}15 \quad R_3 = \frac{1}{20} = 0{,}05 \quad R_4 = \frac{4}{20} = 0{,}20$$

2.1.4 Congruencial Cuadrático

1. Fije un valor inicial X_0
2. Elija cuatro números enteros positivos a, b, c y m
3. Genere una secuencia de números enteros por medio de la siguiente relación de recurrencia:

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i^2 + b \cdot X_i + c) \mod m$$

X_{i+1} es el residuo de dividir (a · X_1^2 + b · X_i + c) entre el módulo

Los números pseudoaleatorios R_i en el intervalo (0, 1) se obtienen a partir de la expresión $R_i = X_i/m$

Ejemplo 2.5

Genere cuatro números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) a partir de los parámetros siguientes, X_0 = 9, a = 12, b = 9, c = 11 y módulo 16.

Solución

PASO 1 → $X_0 = 9$

PASO 2 → $X_{i+1} = (12 \cdot X_i^2 + 9 \cdot X_i + 11) \mod 16$

PASO 3 →

$$X_1 = (12 \cdot X_0^2 + 9 \cdot X_0 + 11) \mod 16 = (12 \cdot 81 + 9 \times 9 + 11) \mod 16 = 8$$
$$X_2 = (12 \cdot X_1^2 + 9 \cdot X_1 + 11) \mod 16 = (12 \cdot 64 + 9 \times 8 + 11) \mod 16 = 3$$
$$X_3 = (12 \cdot X_2^2 + 9 \cdot X_2 + 11) \mod 16 = (12 \cdot 9 + 9 \times 3 + 11) \mod 16 = 2$$
$$X_4 = (12 \cdot X_3^2 + 9 \cdot X_3 + 11) \mod 16 = (12 \cdot 4 + 9 \times 2 + 11) \mod 16 = 13$$

Los números pseudoaleatorios generados:

$$R_1 = \frac{8}{16} = 0{,}50 \quad R_2 = \frac{3}{16} = 0{,}1875 \quad R_3 = \frac{2}{16} = 0{,}125 \quad R_4 = \frac{13}{16} = 0{,}8125$$

La adecuada elección de los parámetros X_0, a, b, c, m permite lograr un periodo suficientemente grande. En este caso para que el generador sea de periodo completo (alcance un periodo de vida máximo) se sugiere que a sea un número par, c un número impar y el módulo m una potencia de dos, entre otros.

2.1.5 Otros generadores congruenciales

Otros generadores congruenciales menos utilizados son, entre otros:

- Congruencial lineal generalizado

$$X_{i+1} = (a_1 \cdot X_i + a_2 \cdot X_{i-1} + \ldots + a_k \cdot X_{i-k+1}) \mod m$$

- Aditivo de Fibonacci

$$X_{i+1} = (X_i + X_{i-1}) \mod m$$

Este generador no tiene buenas propiedades aleatorias y presenta una alta correlación.

- Aditivo de Green

$$X_{i+1} = (X_i + X_{i-k}) \mod m$$

2.1.6 Método aditivo de dos series

Los anteriores generadores en determinadas aplicaciones pueden agotar su longitud en pocos minutos en un ordenador. Con el objetivo de solventar esta deficiencia se han diseñado generadores de mayor longitud y mejores propiedades como el generador aditivo de dos series. Este método consiste en generar una secuencia de números aleatorios Z_i sumando dos secuencias de números aleatorios dadas X_i e Y_i con periodos p_1 y p_2 respectivamente, siendo p_1 y p_2 primos relativos.

$$Z_i = (X_i + Y_i) \mod m$$

Con ello se consigue aumentar el periodo, siendo la longitud del mismo en la nueva secuencia Z_i de $p = p_1 \times p_2$.

2.1.7 Generadores Combinados

Con el objetivo de obtener mejores generadores, resulta factible combinar generadores. Básicamente se utilizan dos técnicas:

- OR exclusivo de números aleatorios de dos o más generadores. Similar a la técnica del epígrafe anterior, reemplazando la suma por un OR excluivo. $Z_i = X_i$ OR Y_i
- Usar una secuencia como índice para determinar el número generado por otra secuencia que será concebido.

2.1.8 Generadores Múltiples Recursivos Combinados

Los generadores múltiples recursivos combinados facilitan la obtención simultánea de múltiples cadenas pudiendo cada una dividirse en subcadenas de gran longitud. El número pseudoaleatorio R_n para una etapa n se obtiene a partir de las siguientes expresiones:

$$X_{1,n} = (a_1 \cdot X_{1,n-2} + b_1 \cdot X_{1,n-3}) \mod m_1$$

$$X_{2,n} = (a_2 \cdot X_{2,n-1} + b_2 \cdot X_{2,n-3}) \mod m_2$$

$$Z_n = (X_{1,n} - X_{2,n}) \mod m_1$$

$$R_n = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{Z_n}{m_1} & \text{si } Z_n > 0 \\ 1 & \text{si } Z_n = 0 \end{array} \right\}$$

Dada una secuencia pequeña de números pseudoaleatorios generados mediante un generador lineal congruencial, resulta sencillo determinar el valor de los parámetros a, c, y m de dicho generador y adivinar la secuencia completa. Lo que conduce, a que los generadores congruenciales no sean aptos para aplicaciones criptográficas que requieren secuencias impredecibles.

A título de ejemplo se recogen a continuación algunos de los generadores que han venido utilizándose a lo largo del tiempo en distintos lenguajes de programación, librerías matemáticas, y programas de simulación.

	Periodo	Usado en
$X_{i+1} = \left((2^{16}+3)\cdot X_i\right) \mod 2^{31}$		
$X_{i+1} = (5^{13}\cdot X_i) \mod 2^{35}$		SIMULA
$X_{i+1} = (7^{5}\cdot X_i) \mod (2^{31}-1)$	2^{31} - 2	APL IMSL
$X_{i+1} = (630360016\cdot X_i) \mod (2^{31}-1)$		SIMSCRIPT FORTRAN
$X_{i+1} = (25214903917\cdot X_i + 11) \mod 2^{48}$	2^{48}	rand48
$X_{i+1} = (1140671485\cdot X_i + 12820163) \mod 2^{24}$	2^{24}	VB
$X_{1,i} = (1403580\cdot X_{1,i-2} - 810728\cdot X_{1,i-3}) \mod (2^{32}-209)$ $X_{2,i} = (527612\cdot X_{2,i-1} - 1370589\cdot X_{2,i-3}) \mod (2^{32}-22853)$ $Z_i = (X_{1,i} - X_{2,i}) \mod (2^{32}-209)$	3 x 10^{57}	ARENA

2.2 Generadores no congruenciales

2.2.1 Método de los cuadrados medios de John Von Neumann y Nicholas Metropolis

1. Seleccione al azar un número X que tenga (2 · n) dígitos
2. Calcule el cuadrado de X. Al elevar X al cuadrado se obtiene un número de hasta (4 · n) dígitos. En el caso de que no tenga (4 · n) dígitos, agregue los ceros a la izquierda necesarios para tener exactamente (4 · n) dígitos.
3. Sea Y el número formado por los (2 · n) dígitos centrales del cuadrado de X
4. El número pseudoaleatorio R se obtiene poniendo el punto decimal delante de Y

$$\boxed{R = 0,Y}$$

5. X = Y
6. Ir al paso 2.

El principal problema de este método es que los números generados se repiten cíclicamente con un periodo muy corto, además, la secuencia generada tiende a degenerar a cero rápidamente y a no tener buenas propiedades estadísticas. La bondad de la secuencia generada viene muy determinada por el valor inicial elegido.

Ejemplo 2.6

Genere mediante el método de los cuadrados medios cuatro números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) a partir del número 4638.

Solución

PASO 1 → $X = 4638$

Iteración	**PASO 2**	**PASO 3**	**PASO 5**
1	X^2 = 21**5110**44	Y = 5110	X = 5110
2	X^2 = 26**1121**00	Y = 1121	X = 1121
3	X^2 = 01**2566**41	Y = 2566	X = 2566
4	X^2 = 06**5843**56	Y = 5843	X = 5843

Los números pseudoaleatorios generados (**PASO 4**):

0,5110	0,1121	0,2566	0,5843

2.2.2 Productos medios

1. Seleccione al azar dos números X_0 e Y que tengan D dígitos cada uno
2. Z = X_0 multiplicado por Y
3. Sea X_{i+1} el número formado por los D dígitos centrales de Z
4. El número pseudoaleatorio generado R = 0,X_{i+1}
5. Z = X_{i+1} multiplicado por X_i
6. Ir al paso 3 hasta obtener el conjunto de números deseado.

Los dos números iniciales (X_0 e Y) se multiplican y del producto (Z) se cogen los D dígitos centrales, a continuación, se elimina uno de los dos números iniciales (Y) y el otro (X_0) se multiplica por el primer número generado (X_1) creando un segundo número (X_2). A continuación se elimina el segundo número inicial (X_0) y se multiplica el primer número generado (X_1) por el segundo número generado (X_2) obteniendo el tercer número (X_3). En cada iteración va eliminando el número más antiguo.

En el caso de que no pueda obtener los D dígitos centrales, agregue ceros a la izquierda de Z.

Ejemplo 2.7

Genere mediante el método de los productos medios cuatro números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) a partir de los números 4638 y 7528.

Solución

PASO 1 → $Y = 4638 \quad X_0 = 7528$

PASO 2 → Z = 34**9148**64

Iteración	PASO 3	PASO 5
1	$X_1 = 9148$	Z = 68**8661**44
2	$X_2 = 8661$	Z = 79**2308**28
3	$X_3 = 2308$	Z = 19**9895**88
4	$X_4 = 9895$	

Los números pseudoaleatorios generados (**PASO 4**):

0,9148	0,8661	0,2308	0,9895

2.2.3 Multiplicador constante

1. Seleccione al azar un número X_0 y una constante A que tengan D dígitos cada uno
2. Z = X_0 multiplicado por A
3. Sea X_{i+1} el número formado por los D dígitos centrales de Z
4. El número pseudoaleatorio generado R = 0,X_{i+1}
5. Z = X_{i+1} multiplicado por A
6. Ir al paso 3 hasta obtener el conjunto de números deseado.

En el caso de que no pueda obtener los D dígitos centrales, agregue ceros a la izquierda de Z.

Ejemplo 2.8

Genere mediante el método del multiplicador constante cuatro números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) a partir del número 4638 y la constante 7528.

Solución

PASO 1 → $X_0 = 4638 \quad A = 7528$

PASO 2 → $Z = 34\underline{\mathbf{9148}}64$

Iteración	**PASO 3**	**PASO 5**
1	$X_1 = 9148$	$Z = 68\underline{\mathbf{8661}}44$
2	$X_2 = 8661$	$Z = 65\underline{\mathbf{2000}}08$
3	$X_3 = 2000$	$Z = 15\underline{\mathbf{0560}}00$
4	$X_4 = 0560$	

Los números pseudoaleatorios generados (**PASO 4**):

0,9148	0,8661	0,2000	0,0560

2.2.4 Método de Lehmer

1. Seleccione al azar un número X_0 de n dígitos y una constante A que tenga k dígitos
2. Z = X_0 multiplicado por A tendrá (n + k) dígitos
3. Quite a Z los k dígitos de la izquierda resultando Y un número de n dígitos
4. Sea X_{i+1} = Y - el número formado por los k dígitos de la izquierda que ha quitado a Z
5. El número pseudoaleatorio generado R = 0,X_{i+1}
6. Z = X_{i+1} multiplicado por A
7. Ir al paso 3 hasta obtener el conjunto de números deseado.

El problema de este método es que acaba degenerando a cero.

Ejemplo 2.9

Genere mediante el método de Lehmer cuatro números pseudoaleatorios en el intervalo (0, 1) a partir del número 4638 y la constante 52

Solución

PASO 1 → $X_0 = 4638 \quad A = 52$

PASO 2 → Z = 24**<u>1176</u>**

Iteración	**<u>PASO 3</u>**	**<u>PASO 4</u>**	**<u>PASO 6</u>**
1	Y = 1176	X_1 = 1152	Z = 05**<u>9904</u>**
2	Y = 9904	X_2 = 9899	Z = 51**<u>4748</u>**
3	Y = 4748	X_3 = 4697	Z = 24**<u>4244</u>**
4	Y = 4244	X_4 = 4220	

Los números pseudoaleatorios generados (**<u>PASO 5</u>**):

0,1152	0,9899	0,4697	0,4220

Dada la dificultad que entraña el diseño de un nuevo generador, es preferible usar un generador ampliamente probado, que concebir uno nuevo que con el paso del tiempo se demuestre ineficiente y con deficientes propiedades aleatorias.

2.3 Actividades

Ejercicio 2.3.1

Halle el periodo del generador congruencial

$$(19 \cdot X_i + 15) \mod 32 \text{ con } X_0 = 1$$

Ejercicio 2.3.2

Halle el periodo del generador congruencial

$$(19 \cdot X_i) \mod 13 \text{ con } X_0 = 1$$

Ejercicio 2.3.3

Programe en una hoja de cálculo el generador del ejercicio anterior.

Ejercicio 2.3.4

Halle el periodo del siguiente generador congruencial

$$(12 \cdot X_i^2 + 13 \cdot X_i + 15) \mod 8 \text{ con } X_0 = 6$$

Ejercicio 2.3.5

Dada la secuencia resultante del generador $X_{i+1} = (5\ X_i) \mod 7$ con $X_0 = 1$ y la secuencia resultante del generador $Y_{i+1} = (7\ Y_i) \mod 11$ con $Y_0 = 3$. Halle el periodo de generador $Z_i = (X_i - Y_i) \mod 7$.

Ejercicio 2.3.6

Programe en una hoja de cálculo la generación de números pseudoaleatorios con el método de los cuadrados medios.

2.4 Solución actividades

Solución ejercicio 2.3.1	16
Solución ejercicio 2.3.2	12
Solución ejercicio 2.3.4	8
Solución ejercicio 2.3.5	30

Ejercicio 2.3.3

	A	B
1	1	6
2	6	10
3	10	8
4	8	9
5	9	2
6	…	…

<u>Semilla</u> X_0

Casilla A1 → 1

X_1

Casilla B1 → RESIDUO((19*A1);13)

Casilla A2 → B1

Arrastre hacia abajo tantas casillas como iteraciones desee realizar. A partir de la fila 12 puede comprobar cómo la secuencia de números generados se repite dado que el periodo es 12.

Ejercicio 2.3.6

	A	B	C	D
1	X	…	…	…
2	…	…	…	…
3	…	…	…	…

<u>Seleccione al azar un número X que tenga (2 · n) dígitos</u>

Casilla A1 → X

<u>Cuadrado de X</u>

Casilla B1 → A1*A1

Agregar ceros a la izquierda del cuadrado de X cuando corresponda

Casilla C1 →

```
SI(LARGO(B1)<8;
        SI(LARGO(B1)<7;
                SI(LARGO(B1)<6;
                        CONCATENAR("000";B1);
                        CONCATENAR("00";B1));
                CONCATENAR("0";B1));B1)
```

Sea Y el número formado por los (2 · n) dígitos centrales del cuadrado de X

Casilla D1 → EXTRAE(C1;3;4)

X = Y

Casilla A2 → D1

Arrastre hacia abajo hasta obtener el conjunto de números deseado.

Obtener el número pseudoaleatorio R poniendo el punto decimal delante de Y

Casilla E1 → CONCATENAR("0";",";D1)

3 Pruebas estadísticas para los números pseudoaleatorios

Las matemáticas pueden ser definidas como aquel tema del cual no sabemos nunca lo que decimos ni si lo que decimos es verdadero.

Bertrand Russell

Para garantizar la calidad de los generadores utilizados debe verificar que la sucesión de números generada cumple las propiedades que se recogen seguidamente, en caso contrario, sí el generador usado produce series con fuertes correlaciones las conclusiones a las que nos conduzca la simulación pueden ser rotundamente falsas.

- Ajustarse a una **distribución uniforme** (0, 1) cuyo valor esperado $\mu = 0{,}5$ y desviación estándar σ = 0,2887

$$\mu = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1-0} \cdot dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_0^1 (x-0{,}5)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 (x-0{,}5)^2 \times \frac{1}{1-0} \cdot dx = \frac{1}{12}$$

- Ser **estadísticamente independientes**. No puede existir correlación alguna entre ellos, debe tratarse de valores uniformemente dispersos.

Mediante pruebas estadísticas debe corroborar que los números generados cumplen dichas propiedades.

3.1 Prueba de uniformidad

Permite contrastar la hipótesis nula de que los números aleatorios generados provienen de una distribución uniforme (0, 1)

$$\boxed{H_0 : U(0, 1)}$$

frente a la hipótesis alternativa

$$\boxed{H_1 : \text{no } U(0, 1)}$$

3.1.1 Prueba de Kolmogorov Smirnov

PASO 1. Ordene de menor a mayor los números aleatorios generados.

PASO 2. Calcule los valores D^+, D^- y D

$$D^+ = \max_{1<i<n} \left| \frac{i}{n} - x_i \right| \quad D^- = \max_{1<i<n} \left| x_i - \frac{i-1}{n} \right| \quad D = \max \left\{ D^+, D^- \right\}$$

PASO 3. Determine el valor crítico $d_{\alpha,n}$ en la tabla de valores críticos de Kolmogorov Smirnov para un nivel de confianza (1 – α) y un tamaño de muestra n. Si D > $d_{\alpha,n}$ existe una diferencia significativa entre la distribución del conjunto de números generado y la distribución uniforme, debe pues rechazar la hipótesis nula H_0 de que el conjunto de números generado proviene de una población distribuida uniforme (0, 1), en caso contrario al no existir diferencia significativa no puede rechazar dicha hipótesis nula H_0.

Ejemplo 3.1

Determine si los números que recoge la tabla, generados mediante la función ALEATORIO de la hoja de cálculo, siguen una distribución uniforme (0, 1) con un nivel de aceptación del 95%.

0,048	0,591	0,478	0,166	0,932
0,926	0,007	0,551	0,362	0,533
0,368	0,437	0,178	0,411	0,545
0,787	0,594	0,086	0,951	0,772
0,298	0,199	0,157	0,401	0,631

Solución

PASO 1 y 2. Ordene de menor a mayor los números aleatorios generados y calcule los valores D^+, D^- y D.

i	x_i	i/n	$(i/n) - x_i$	$x_i - (i-1/n)$
1	0,007	0,04	0,033	0,007
2	0,048	0,08	0,032	0,008
3	0,086	0,12	0,034	0,006
4	0,157	0,16	0,003	0,037
5	0,166	0,20	0,034	0,006
6	0,178	0,24	0,062	-0,022
7	0,199	0,28	0,081	-0,041
8	0,298	0,32	0,022	0,018
9	0,362	0,36	-0,002	0,042
10	0,368	0,40	0,032	0,008
11	0,401	0,44	0,039	0,001
12	0,411	0,48	0,069	-0,029
13	0,437	0,52	0,083	-0,043
14	0,478	0,56	0,082	-0,042

i	x_i	i/n	$(i/n) - x_i$	$x_i - (i\text{-}1/n)$
15	0,533	0,60	0,067	-0,027
16	0,545	0,64	0,095	-0,055
17	0,551	0,68	0,129	-0,089
18	0,591	0,72	0,129	-0,089
19	0,594	0,76	0,166	-0,126
20	0,631	0,80	0,169	-0,129
21	0,772	0,84	0,068	-0,028
22	0,787	0,88	0,093	-0,053
23	0,926	0,92	-0,006	0,046
24	0,932	0,96	0,028	0,012
25	0,951	1,00	0,049	-0,009

$$D^{+} = \max_{1<i<n} \left| \frac{i}{n} - x_i \right| = 0{,}169 \qquad D^{-} = \max_{1<i<n} \left| x_i - \frac{i-1}{n} \right| = 0{,}129$$

$$D = \max \left\{ D^{+}, D^{-} \right\} = \max \left\{ 0{,}169 \;\; 0{,}129 \right\} = 0{,}169$$

PASO 3. El valor crítico $d_{\alpha,n}$ en la tabla de valores críticos de Kolmogorov Smirnov para un nivel de confianza del 95% y un tamaño de muestra de 25 es de 0,270

Dado que 0,169 < 0,270 ($D < d_{\alpha,n}$) no existe una diferencia significativa entre la distribución del conjunto de números generado y la distribución uniforme. No puede pues rechazar la hipótesis nula H_0 de que el conjunto de números generado proviene de una población distribuida uniforme U(0, 1).

3.1.2 Prueba de Chi Cuadrado

PASO 1. Agrupe los n números aleatorios generados en K clases disjuntas de igual amplitud A.

PASO 2. Halle la frecuencia de cada clase f_i.

PASO 3. Considere la variable aleatoria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(f_i - n \cdot A_i)^2}{n \cdot A_i}$$

Para valores de n suficientemente grandes esta variable aleatoria sigue una distribución χ^2 con (K – 1) grados de libertad.

PASO 4. Determine el valor crítico $\chi^2_{\alpha,K-1}$ en la tabla de valores críticos de χ^2para un nivel de confianza (1 – α) y (K – 1) grados de libertad. Si $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,K-1}$ existe una diferencia significativa entre la distribución del conjunto de números generado y la distribución uniforme, debe pues rechazar la hipótesis nula H_0 de que la secuencia de números generada proviene de una población distribuida uniforme (0, 1), en caso contrario al no existir diferencia significativa no puede rechazar la hipótesis nula H_0.

Ejemplo 3.2

Determine si los números que recoge la tabla, generados mediante la función ALEATORIO de la hoja de cálculo, siguen una distribución uniforme (0, 1) con un nivel de aceptación del 95%.

0,048	0,591	0,478	0,166	0,932
0,926	0,007	0,551	0,362	0,533
0,368	0,437	0,178	0,411	0,545
0,787	0,594	0,086	0,951	0,772
0,298	0,199	0,157	0,401	0,631

Solución

PASO 1. Agrupe los n números aleatorios generados en K clases disjuntas de igual amplitud A.

$$K = 4 \ \text{ y } \ A = 0,25$$

PASO 2. Halle la frecuencia de cada clase f_i.

CLASE								f_i
0,00 – 0,25	0,048	0,007	0,199	0,178	0,086	0,157	0,166	7
0,25 – 0,50	0,368	0,298	0,437	0,478	0,362	0,411	0,401	7
0,50 – 0,75	0,591	0,594	0,551	0,533	0,545	0,631		6
0,75 – 1,00	0,926	0,787	0,951	0,932	0,772			5
TOTAL								**25**

PASO 3. Considere la variable aleatoria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(f_i - n \cdot A_i)^2}{n \cdot A_i}$$

$$n \cdot A_i = 25 \times 0{,}25 = 6{,}25$$

$$\chi^2 = \frac{(7 - 6{,}25)^2}{6{,}25} + \frac{(7 - 6{,}25)^2}{6{,}25} + \frac{(6 - 6{,}25)^2}{6{,}25} + \frac{(5 - 6{,}25)^2}{6{,}25} = 0{,}44$$

PASO 4. El valor crítico $\chi^2_{\alpha,K-1}$ en la tabla de valores críticos de χ^2 para un nivel de confianza del 95% y 3 grados de libertad es de 7,815.

Dado que 0,44 < 7,815 $(\chi^2 < \chi^2_{\alpha,K-1})$ no existe una diferencia significativa entre la distribución del conjunto de números generado y la distribución uniforme. No puede pues rechazar la hipótesis nula H_0 de que la secuencia de números generada proviene de una población distribuida uniforme (0, 1).

3.2 Prueba de independencia

Permite contrastar la hipótesis nula de que los números aleatorios generados son independientes.

H_0 : los números aleatorios generados son independientes

frente a la hipótesis alternativa

H_1 : los números aleatorios generados no son independientes

3.2.1 Prueba de corridas (rachas) arriba y abajo

PASO 1. Determine una secuencia S de unos y ceros colocando un cero si el número aleatorio generado i es menor o igual que el número aleatorio generado anterior (i - 1), en caso contario ponga un uno. La secuencia S contiene (n - 1) números debido a que el primer número no tiene anterior con el que compararlo.

PASO 2. Halle el número de corridas (rachas) observadas C_0. Una corrida viene dada por el número de unos o ceros consecutivos que la forman.

PASO 3. Calcule el valor esperado y la variancia del número de corridas así como el estadístico Z_0 mediante las siguientes expresiones:

$$\mu_{C_0} = \frac{2 \cdot n - 1}{3} \qquad \sigma^2_{C_0} = \frac{16 \cdot n - 29}{90} \qquad Z_0 = \frac{C_0 - \mu C_0}{\sigma_{C_0}}$$

Dado que C_0 sigue una distribución normal de media μ_{C_0} y variancia $\sigma^2_{C_0}$, y Z_0 una distribución normal (0, 1). Siendo el intervalo de aceptación:

$$-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq +\, z_{\alpha/2}$$

Si el estadístico Z_0 se encuentra dentro de los límites de aceptación no puede rechazar la hipótesis nula H_0 de que los números aleatorios generados son independientes, en caso contrario debe rechazar la hipótesis nula H_0.

Ejemplo 3.3

Determine si los números que recoge la tabla, generados mediante la función ALEATORIO de la hoja de cálculo, son independientes con un nivel de aceptación del 95%.

0,048	0,591	0,478	0,166	0,932
0,926	0,007	0,551	0,362	0,533
0,368	0,437	0,178	0,411	0,545
0,787	0,594	0,086	0,951	0,772
0,298	0,199	0,157	0,401	0,631

Solución

PASO 1 y 2. Determine la secuencia S de unos y ceros. A continuación halle el número de corridas observadas C_o.

x_i	S
0,048	
0,926	1
0,368	0
0,787	1
0,298	0
0,591	1
0,007	0
0,437	1
0,594	1
0,199	0

Corrida	Longitud de la corrida
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	2
8	1
9	2
10	2

x_i	S
0,478	1
0,551	1
0,178	0
0,086	0
0,157	1
0,166	1
0,362	1
0,411	1
0,951	1
0,401	0
0,932	1
0,533	0
0,545	1
0,772	1
0,631	0

Corrida	Longitud de la corrida
11	5
12	1
13	1
14	1
15	2
16	1

Número de corridas de la secuencia C_o = 16 corridas

PASO 3. Calcule el valor esperado y la variancia del número de corridas así como el estadístico Z_0.

$$\mu_{C_0} = \frac{2 \times n - 1}{3} = \frac{(2 \times 25) - 1}{3} = 16{,}33$$

$$\sigma^2_{C_0} = \frac{16 \times n - 29}{90} = \frac{(16 \times 25) - 29}{90} = 4{,}12$$

$$Z_0 = \frac{C_0 - \mu_{C_0}}{\sigma_{C_0}} = \frac{16 - 16{,}33}{2{,}03} = -\,0{,}16417$$

El valor crítico $Z_{0,025}$ en la tabla de la distribución normal estándar es de 1,96.

Dado que 0,16 < 1,96 $\left(\left| Z_0 \right| \le Z_{\alpha/2} \right)$ no puede rechazar la hipótesis nula H_0 de que los números pseudoaleatorios generados son independientes dado que el valor del estadístico no supera al valor crítico.

3.3 Prueba de la media

Permite contrastar la hipótesis nula de que la media poblacional es de 0,5 al tratarse de una población distribuida uniforme

$$\boxed{H_0 : \mu = 0{,}5}$$

frente a la hipótesis alternativa

$$\boxed{H_1 : \mu \neq 0{,}5}$$

Dado que la varianza poblacional es conocida (varianza de la distribución uniforme (0, 1) = 1/12) y el tamaño de muestra es grande, el intervalo de aceptación viene dado por:

$$0{,}5 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{12 \cdot n}} \leq \mu \leq 0{,}5 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{12 \cdot n}}$$

Si la media de los números aleatorios generados se encuentra dentro de los límites de aceptación no puede rechazar la hipótesis nula H_0 de que el conjunto de números generado proviene de una población cuya media es de 0,5 con un nivel de aceptación de (1 - α), en caso contrario debe rechazar la hipótesis nula H_0.

Ejemplo 3.4

Determine si los números que recoge la tabla, generados mediante la función ALEATORIO de la hoja de cálculo, tienen un valor medio de 0,5 con un nivel de aceptación del 95%.

0,048	0,591	0,478	0,166	0,932
0,926	0,007	0,551	0,362	0,533
0,368	0,437	0,178	0,411	0,545
0,787	0,594	0,086	0,951	0,772
0,298	0,199	0,157	0,401	0,631
0,294	0,537	0,764	0,097	0,356
0,913	0,161	0,251	0,558	0,671
0,371	0,646	0,513	0,783	0,933
0,457	0,886	0,627	0,516	0,830
0,163	0,332	0,016	0,213	0,773

Solución

$$0{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{1}{\sqrt{12 \cdot 50}} \leq \mu \leq 0{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{1}{\sqrt{12 \cdot 50}}$$

$$0{,}42 \leq \mu \leq 0{,}58$$

Dado que la media de los números pseudoaleatorios generados $\bar{x} = 0{,}4814$ se encuentra dentro de los límites de aceptación no puede rechazar la hipótesis nula H_0 de que el conjunto de números generado proviene de una población cuya media es de 0,5 con un nivel de aceptación del 95%.

3.4 Prueba de varianza

Permite contrastar la hipótesis nula de que la varianza poblacional es de 1/12 al tratarse de una población distribuida uniforme

$$\boxed{H_0 : \sigma^2 = 1/12}$$

frente a la hipótesis alternativa

$$\boxed{H_1 : \sigma^2 \neq 1/12}$$

El intervalo de aceptación viene dado por:

$$\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{12 \cdot (n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{12 \cdot (n-1)}$$

Si la varianza de los números aleatorios generados se encuentra dentro de los límites de aceptación no puede rechazar la hipótesis nula H_0 de que el conjunto de números generado proviene de una población cuya varianza es de 1/12 con un nivel de aceptación de (1 - α), en caso contrario debe rechazar la hipótesis nula H_0.

Ejemplo 3.5

Determine si los números que recoge la tabla, generados mediante la función ALEATORIO de la hoja de cálculo, tienen una varianza de 1/12 con un nivel de aceptación del 95%.

0,048	0,591	0,478	0,166	0,932
0,926	0,007	0,551	0,362	0,533
0,368	0,437	0,178	0,411	0,545
0,787	0,594	0,086	0,951	0,772
0,298	0,199	0,157	0,401	0,631
0,294	0,537	0,764	0,097	0,356
0,913	0,161	0,251	0,558	0,671
0,371	0,646	0,513	0,783	0,933
0,457	0,886	0,627	0,516	0,830
0,163	0,332	0,016	0,213	0,773

Solución

$$\frac{\chi^2_{0,95,49}}{12 \times 49} \leq \sigma^2 \leq \frac{\chi^2_{0,05,49}}{12 \times 49}$$

$$0{,}05368 \leq \sigma^2 \leq 0{,}11940$$

Dado que la varianza de los números pseudoaleatorios generados $s^2 = 0{,}075178$ se encuentra dentro de los límites de aceptación no puede rechazar la hipótesis nula H_0 de que el conjunto de números generado proviene de una población cuya varianza es de 1/12 con un nivel de aceptación del 95%.

3.5 Actividades

Dados los números pseudoaleatorios recogidos en la tabla siguiente.

0,0581	0,4560	0,5427	0,0333	0,0359
0,9267	0,0929	0,9740	0,0038	0,9593
0,2661	0,4020	0,5979	0,3812	0,8748
0,4933	0,9484	0,3248	0,4503	0,3694
0,0452	0,2591	0,7721	0,6339	0,7520
0,0701	0,2506	0,3486	0,5026	0,0969
0,4453	0,6056	0,2108	0,5287	0,4978
0,3511	0,4234	0,0696	0,7635	0,6173
0,2489	0,2768	0,4207	0,8193	0,0934
0,4795	0,3397	0,2718	0,7339	0,6836

H_0: el conjunto de números generado proviene de una población distribuida uniforme (0, 1).

Ejercicio 3.1

Determine con la prueba de kolmogorov Smirnov si H_0 es o no cierta.

Ejercicio 3.2

Utilice la prueba de Chi Cuadrado con nivel de aceptación del 95% para comprobar la hipótesis H_0.

Ejercicio 3.3

Determine mediante la prueba de independencia de corridas (rachas) arriba y abajo, si los números de la tabla son pseudoaleatorios con un nivel de aceptación de 95%.

Ejercicio 3.4

Realice la prueba de la media a los números de la tabla, con un nivel de aceptación del 95%.

Ejercicio 3.5

Realice la prueba de varianza a los números de la tabla, con un nivel de aceptación del 95%.

3.6 Solución actividades

Ejercicio 3.1

$$D = \max\left\{D^+, D^-\right\} = \max\left\{0{,}1574 \ \ 0{,}1374\right\} = 0{,}1574$$

El valor crítico $d_{5\%,50}$ = 0,192. Como 0,1574 < 0,192 ($D < d_{5\%,50}$) no existe una diferencia significativa entre la distribución del conjunto de números generado y la distribución uniforme. No puede rechazar la hipótesis H_0 de que el conjunto de números generado proviene de una población distribuida uniforme (0, 1).

Ejercicio 3.2

$$n \cdot A_i = 50 \times 0{,}25 = 12{,}50$$

$$\chi^2 = \frac{(13 - 12{,}50)^2}{12{,}50} + \frac{(19 - 12{,}50)^2}{12{,}50} + \frac{(9 - 12{,}50)^2}{12{,}50} + \frac{(9 - 12{,}50)^2}{12{,}50} = 5{,}36$$

El valor crítico $\chi^2_{5\%,3} = 7{,}815$. Dado que 5,36 < 7,815 $(\chi^2 < \chi^2_{5\%,3})$ no existe una diferencia significativa entre la distribución del conjunto de números generado y la distribución uniforme. No puede rechazar la hipótesis nula H_0 de que la secuencia de números generada proviene de una población distribuida uniforme (0, 1).

Ejercicio 3.3

Número de corridas de la secuencia C_o = 36 corridas

$$\mu_{C_0} = \frac{2 \cdot n - 1}{3} = 33$$

$$\sigma_{C_0}^2 = \frac{16 \cdot n - 29}{90} = 8{,}566$$

$$Z_0 = \frac{C_0 - \mu_{C_0}}{\sigma_{C_0}} = 1{,}024$$

El valor crítico $Z_{0,025}$ = 1,96. Dado que 1,024 < 1,96 $\left(\left|Z_0\right| \le Z_{2,5\%}\right)$ no puede rechazar la hipótesis de que los números pseudoaleatorios generados son independientes dado que el valor del estadístico no supera al valor crítico.

Ejercicio 3.4

$$0{,}42 \leq \mu \leq 0{,}58$$

Dado que la media de los números pseudoaleatorios generados $\bar{x} = 0{,}4361$ se encuentra dentro de los límites de aceptación no puede rechazar la hipótesis de que el conjunto de números generado proviene de una población cuya media es de 0,5 con un nivel de aceptación del 95%.

Ejercicio 3.5

$$0{,}05368 \leq \sigma^2 \leq 0{,}11940$$

Dado que la varianza de los números pseudoaleatorios generados $S^2 = 0{,}07628878$ se encuentra dentro de los límites de aceptación no puede rechazar la hipótesis de que el conjunto de números generado proviene de una población cuya varianza es de 1/12 con un nivel de aceptación del 95%.

4 Generación de variables aleatorias

Con números se puede demostrar cualquier cosa.

Thomas Carlyle

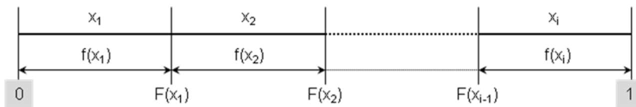
Un **experimento aleatorio** es un proceso cuyo resultado no es conocido con exactitud. El conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio recibe el nombre de **espacio muestral** y los resultados concretos de realizar el experimento es lo que se conoce como **muestras**. Una **variable aleatoria** X es una función que asigna un valor a cada resultado de un experimento aleatorio, trasladando así la probabilidad de un espacio no numérico a uno numérico, con las ventajas que esto conlleva. Para caracterizar la **distribución de probabilidad de una variable aleatoria** se usa la función de densidad acumulada de probabilidad o función de distribución F(x), función que asigna a cada punto la probabilidad de que X tome un valor igual o inferior x.

$$\boxed{F(x) = P(-\infty, x) = P(X \leq x)}$$

Simular el comportamiento de una variable aleatoria requiere generar una secuencia de números aleatorios distribuidos uniformemente (0,1) y una función que transforme la anterior serie de números aleatorios en valores de la distribución de probabilidad correspondiente. A continuación, se explican los métodos más habituales para llevar a cabo dicha traslación, obteniendo así muestras de la variable correspondiente.

4.1 Generación de variables aleatorias discretas

El procedimiento se basa en dividir el intervalo (0, 1) en tantos sub-intervalos como valores pueda tomar la variable aleatoria, (x_1, x_2, ..., x_i) siendo el tamaño de los mismos su probabilidad.



A continuación genere un número aleatorio R uniformemente distribuido (0, 1), compruebe el sub-intervalo en el que se encuentra R y asigne a la variable el valor correspondiente del sub-intervalo, lo que equivale a encontrar la inversa de F(x).

$$\boxed{Si \quad F(x_{i-1}) \leq R < F(x_i) \rightarrow X = x_i}$$

PASO 1. Calcule la probabilidad f(x) de cada uno de los valores que pueda alcanzar la variable aleatoria x.

PASO 2. Evalúe la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

PASO 3. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de la variable aleatoria x.

PASO 4. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y determine el valor de la variable aleatoria X aplicando la regla correspondiente.

4.1.1 Distribución de Poisson

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

PASO 1. Calcule la probabilidad f(x) de cada uno de los valores que pueda alcanzar la variable aleatoria x.

x	0	1	2	....	n
f(x)	f(x = 0)	f(x = 1)	f(x = 2)	....	f(x = n)

PASO 2. Evalúe la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

x	0	1	2	....	n
f(x)	f(x = 0)	f(x = 1)	f(x = 2)	....	f(x = n)
F(x)	F(0) = f(x = 0)	$F(1) = \sum_{i=0}^{1} f(x = i)$	....	....	$F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(x = i)$

PASO 3. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de la variable aleatoria x.

x	0	1	2	....	n
f(x)	f(x = 0)	f(x = 1)	f(x = 2)	....	f(x = n)
F(x)	$F(x \leq 0)$	$F(x \leq 1)$	$F(x \leq 2)$	....	$F(x \leq n)$
Intervalo	0 - F(0)	F(0) - F(1)	F(1) - F(2)	....	F(n - 1) - F(n)

PASO 4. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y determine el valor de la variable aleatoria X aplicando la regla correspondiente.

Ejemplo 4.1

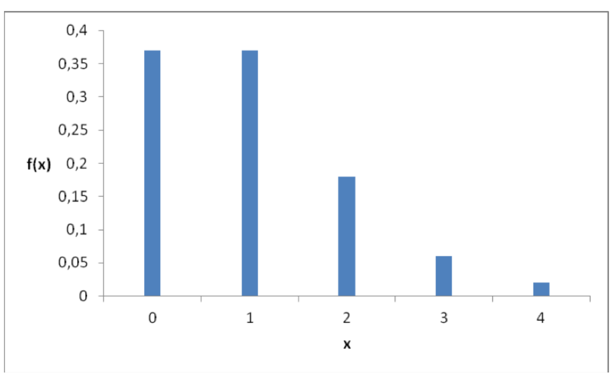
Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de media 1 minuto/individuo.

Solución

PASO 1. Calcule la probabilidad f(x) de los distintos valores que pueda alcanzar la variable aleatoria x.

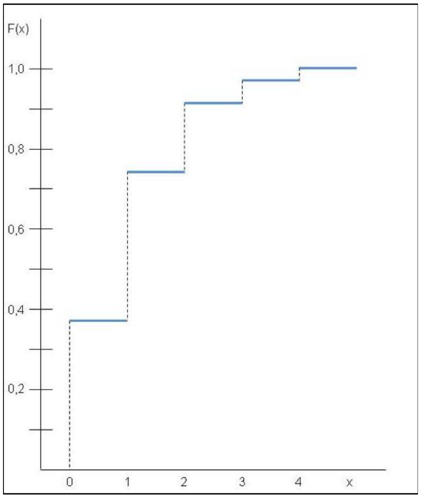
$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \frac{1^x \cdot e^{-1}}{1!}$$

x	0	1	2	3	4
Probabilidad f(x)	0,37	0,37	0,18	0,06	0,02



PASO 2. Evalúe la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

x	0	1	2	3	4
Probabilidad f(x)	0,37	0,37	0,18	0,06	0,02
Probabilidad Acumulada F(x)	0,37	0,74	0,92	0,98	1,00



PASO 3. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de la variable aleatoria x.

x	0	1	2	3	4
Probabilidad f(x)	0,37	0,37	0,18	0,06	0,02
Probabilidad Acumulada F(x)	0,37	0,74	0,92	0,98	1,00
Intervalo números aleatorios	0,00 0,37	0,38 0,74	0,75 0,92	0,93 0,98	0,99 1,00

La regla de aplicación para generar esta variable aleatoria es la siguiente:

$$x = 0 \quad \text{si} \;\; R \in (0{,}00 - 0{,}37)$$
$$x = 1 \quad \text{si} \;\; R \in (0{,}38 - 0{,}74)$$
$$x = 2 \quad \text{si} \;\; R \in (0{,}75 - 0{,}92)$$
$$x = 3 \quad \text{si} \;\; R \in (0{,}93 - 0{,}98)$$
$$x = 4 \quad \text{si} \;\; R \in (0{,}99 - 1{,}00)$$

PASO 4. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x aplicando la regla correspondiente.

Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,048 perteneciente al intervalo (0,00 - 0,37) de donde el valor de la variable aleatoria es x = 0.

4.1.2 Distribución de Bernoulli

$$f(x) = p^x \cdot (1 - p)^{1-x}$$

PASO 1. Calcule la probabilidad f(x) de cada uno de los valores que pueda alcanzar la variable aleatoria x.

x	**0**	**1**
f(x)	1 - p	p

PASO 2. Evalúe la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

x	**0**	**1**
f(x)	1 - p	p
F(x)	1 - p	1

PASO 3. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de la variable aleatoria x.

x	**0**	**1**
f(x)	1 - p	p
F(x)	1 - p	1
Intervalo	0 a (1 - p)	(1 - p) a 1

PASO 4. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x aplicando la regla correspondiente.

$$x = 0 \quad \text{si} \;\; R \in (0 \;-\; (1 - p))$$

$$x = 1 \quad \text{si} \;\; R \in ((1 - p) \;-\; 1)$$

Ejemplo 4.2

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución de Bernoulli con p = 2%.

Solución

PASO 1. Calcule la probabilidad f(x) de cada uno de los valores que pueda alcanzar la variable aleatoria x.

x	0	1
Probabiidad f(x)	0,98	0,02

PASO 2. Evalúe la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

x	0	1
Probabiidad f(x)	0,98	0,02
Probabilidad acumulada F(x)	0,98	1,00

PASO 3. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de la variable aleatoria x.

x	0	1
Probabiidad f(x)	0,98	0,02
Probabilidad acumulada F(x)	0,98	1,00
Intervalo números aleatorios	0,00 - 0,98	0,98 - 1,00

La regla de aplicación para generar esta variable aleatoria es la siguiente:

$$x = 0 \qquad \text{si } R \in (0 - 0{,}98)$$

$$x = 1 \qquad \text{si } R \in (0{,}98 - 1)$$

PASO 4. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x aplicando la regla correspondiente.

Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,57 perteneciente al intervalo (0,00 - 0,98) de donde el valor de la variable aleatoria es x = 0.

4.1.3 Distribución Binomial

$$f(x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

PASO 1. Calcule la probabilidad f(x) de cada uno de los valores que pueda alcanzar la variable aleatoria x.

x	0	1	2	....	n
f(x)	f(x = 0)	f(x = 1)	f(x = 2)	....	f(x = n)

PASO 2. Evalúe la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

x	0	1	....	n
f(x)	f(x = 0)	f(x = 1)	....	f(x = n)
F(x)	F(0) = f(x = 0)	$F(1) = \sum_{i=0}^{1} f(x = i)$	....	$F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(x = i)$

PASO 3. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de la variable aleatoria x.

x	0	1	2	....	n
f(x)	f(x = 0)	f(x = 1)	f(x = 2)	....	f(x = n)
F(x)	F(x ≤ 0)	F(x ≤ 1)	F(x ≤ 2)	....	F(x ≤ n)
Intervalo	0 - F(0)	F(0) - F(1)	F(1) - F(2)	....	F(n - 1) - F(n)

PASO 4. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x aplicando la regla correspondiente.

Ejemplo 4.3

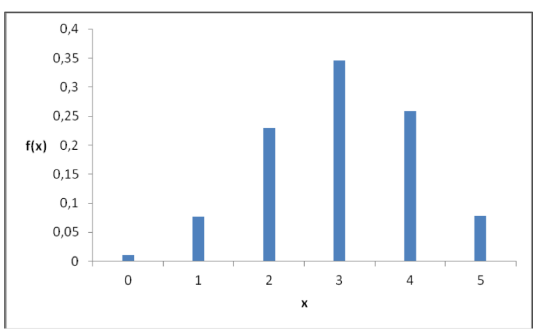
Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución Binomial de parámetros n = 5 y p = 0,6.

Solución

PASO 1. Calcule la probabilidad f(x) de cada uno de los valores que pueda alcanzar la variable aleatoria x.

$$f(x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \frac{5!}{x! \times (5-x)!} \times 0{,}6^x \times 0{,}4^{5-x}$$

x	0	1	2	3	4	5
Probabiidad f(x)	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078



PASO 2. Evalúe la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

x	0	1	2	3	4	5
Probabiidad f(x)	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078
Probabilidad acumulada F(x)	0,010	0,087	0,317	0,663	0,922	1,000

PASO 3. Establezca el intervalo de números aleatorios correspondiente a cada valor de la variable aleatoria x.

x	0	1	2	3	4	5
Probabiidad f(x)	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078
Probabilidad acumulada F(x)	0,010	0,087	0,317	0,663	0,922	1,000
Intervalo números aleatorios	0,000 0,010	0,011 0,087	0,088 0,317	0,318 0,663	0,664 0,922	0,923 1,000

La regla de aplicación para generar esta variable aleatoria es la siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
x = 0 & \text{si } R \in (0{,}000 - 0{,}010) \\
x = 1 & \text{si } R \in (0{,}011 - 0{,}087) \\
x = 2 & \text{si } R \in (0{,}088 - 0{,}317) \\
x = 3 & \text{si } R \in (0{,}318 - 0{,}663) \\
x = 4 & \text{si } R \in (0{,}664 - 0{,}922) \\
x = 5 & \text{si } R \in (0{,}923 - 1{,}000)
\end{array}
$$

PASO 4. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x aplicando la regla correspondiente.

Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,048 perteneciente al intervalo (0,011 - 0,087) de donde el valor de la variable aleatoria es x = 1.

Lo propio sucede con otras distribuciones de variables discretas

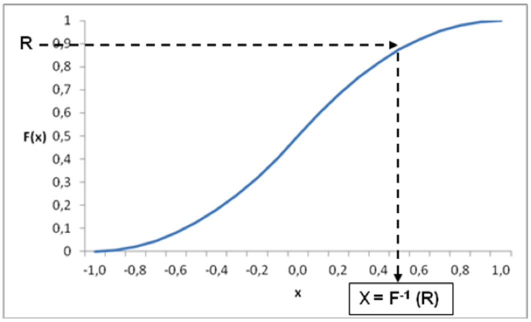
Geométrica $$f(x) = p \cdot (1-p)^{x-1}$$

Binomial negativa $$f(x) = \frac{(x-1)!}{(k-1)! \cdot (x-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{x-k}$$

Hipergeométrica $$f(x) = \frac{\binom{N-M}{n-x} \cdot \binom{M}{x}}{\binom{N}{n}}$$

4.2 Método de la transformada inversa

Sea X la variable aleatoria de la que está interesado en simular valores y F(x) su función de distribución. El método consiste en simular valores de una variable aleatoria distribuida uniforme (0, 1) y considerar F^{-1} (R) como los valores simulados de la variable aleatoria X.



La figura muestra cómo una vez simulado un valor R ∈ U(0, 1) y conocida F(x), mediante la transformación F^{-1} (R) se obtiene el valor de la variable aleatoria X.

PASO 1. Iguale la función de densidad acumulada de probabilidad F(x) de la variable aleatoria que va a simular a un número aleatorio R distribuido uniforme (0, 1).

$$\boxed{F(x) = R}$$

PASO 2. Despeje de la anterior igualdad la variable aleatoria x determinando así el valor de la variable aleatoria x cuya distribución acumulada F(x) es igual al número aleatorio R distribuido uniforme (0, 1).

$$\boxed{x = F^{-1}(R)}$$

PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la anterior expresión.

4.2.1 Distribución Uniforme

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

PASO 1. Iguale la función de densidad acumulada de probabilidad F(x) a un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1).

$$F(x) = R \quad \rightarrow \quad \frac{x-a}{b-a} = R$$

PASO 2. Despeje de la anterior igualdad la variable aleatoria x.

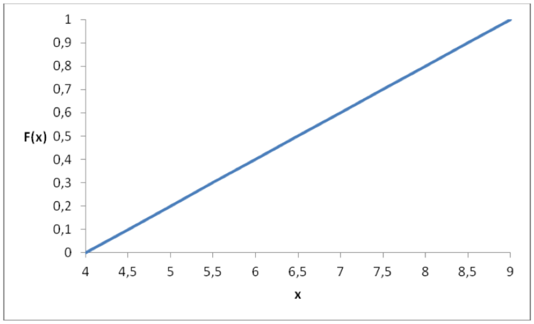
$$\boxed{x = a + R \cdot (b-a)}$$

PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la anterior expresión.

Ejemplo 4.4

Simule el comportamiento de una variable aleatoria distribuida uniforme (4,9).

Solución



PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la expresión $x = a + R \cdot (b - a)$.

Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,048 de donde el valor de la variable aleatoria

$$x = a + R \cdot (b - a) = 4 + [0{,}048 \times (9 - 4)] = 4{,}24$$

4.2.2 Distribución Exponencial

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \quad \text{siendo } x \geq 0$$

PASO 1. Iguale la función de densidad acumulada de probabilidad F(x) a un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1).

$$F(x) = R \quad \rightarrow \quad 1 - e^{-\lambda \cdot x} = R$$

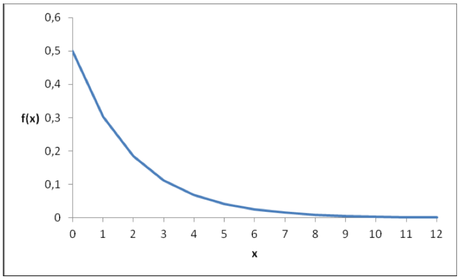
PASO 2. Despeje de la anterior igualdad la variable aleatoria x.

$$\boxed{x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - R)}$$

PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la anterior expresión.

Ejemplo 4.5

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial de media 2 minutos/individuo.

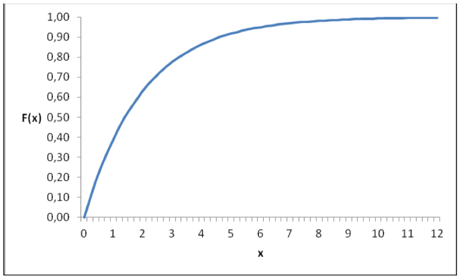


Solución

PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la expresión $x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - R)$.

Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,048 de donde el valor de la variable aleatoria

$$x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - R) = -2 \times \ln(1 - 0{,}048) = 0{,}09838049$$



4.2.3 Distribución Weibull

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda \cdot x)^{\beta}} \quad \text{siendo } x \geq 0$$

PASO 1. Iguale la función de densidad acumulada de probabilidad F(x) a un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1).

$$F(x) = R \quad \rightarrow \quad 1 - e^{-(\lambda \cdot x)^{\beta}} = R$$

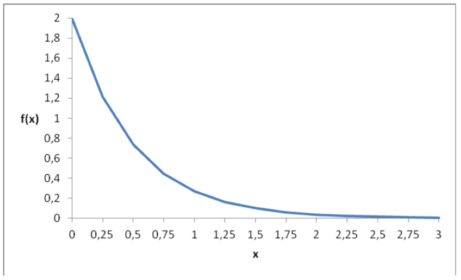
PASO 2. Despeje de la anterior igualdad la variable aleatoria x.

$$\boxed{x = \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt[\beta]{-\ln(1 - R)}}$$

PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la anterior expresión.

Ejemplo 4.6

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución Weibull con parámetros $\beta = 1$ y $\lambda = 2$.

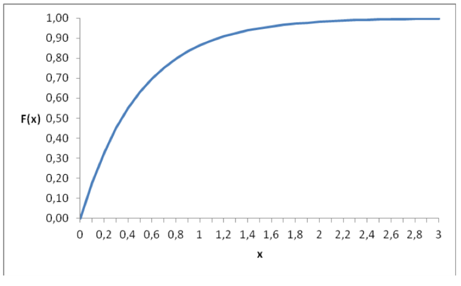


Solución

PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la expresión $x = \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt[\beta]{-\ln(1-R)}$.

Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,048 de donde el valor de la variable aleatoria

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt[\beta]{-\ln(1-R)} = \frac{1}{2} \times (-\ln(1-0{,}048)) = 0{,}02459512$$



4.2.4 Distribución Empírica

Dada f(x) la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0{,}1 & \text{si } 1 \le x \le 6 \end{Bmatrix}$$

PASO 0. Halle la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

$$F(x) = \begin{Bmatrix} \int_0^x x \cdot dx = \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0{,}5 + \int_1^x 0{,}1 \cdot dx = 0{,}4 + 0{,}1 \cdot x & \text{si } 1 < x \le 6 \end{Bmatrix}$$

PASO 1. Iguale la función de densidad acumulada de probabilidad F(x) a un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1).

$$F(x) = R \quad \rightarrow \quad F(x) = \begin{Bmatrix} \frac{x^2}{2} = R & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0{,}4 + 0{,}1 \cdot x = R & \text{si } 1 < x \le 6 \end{Bmatrix}$$

PASO 2. Despeje de la anterior igualdad la variable aleatoria x.

$$x = \begin{Bmatrix} \sqrt{2 \cdot R} & \text{si } R \le 0{,}5 \\ 10 \cdot R - 4 & \text{si } R > 0{,}5 \end{Bmatrix}$$

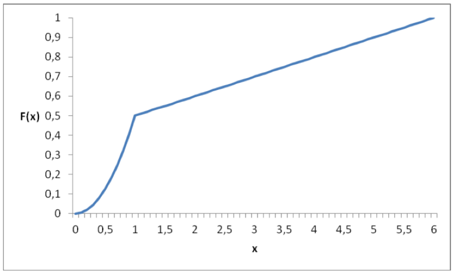
PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la anterior expresión.

Ejemplo 4.7

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue la distribución siguiente:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0{,}1 & \text{si } 1 < x \leq 6 \end{Bmatrix}$$

Solución



PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la expresión hallada en el PASO 2.

$$x = \begin{Bmatrix} \sqrt{2 \cdot R} & \text{si } R \leq 0{,}5 \\ 10 \cdot R - 4 & \text{si } R > 0{,}5 \end{Bmatrix}$$

Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,048 de donde el valor de la variable aleatoria

$$x = \sqrt{2 \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 0{,}048} = 0{,}30983867$$

4.2.5 Distribución Triangular

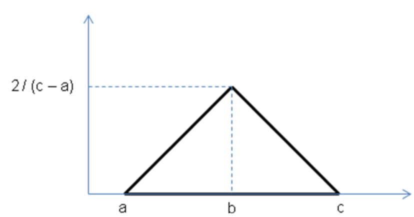
Dado que:

$$\frac{(c-a)\cdot \text{altura}}{2} = 1$$

La altura viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{altura} = \frac{2}{(c-a)}$$

A continuación se muestra la figura correspondiente a la distribución triangular.



Donde:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{(c-a)\cdot(b-a)} \cdot (x-a) & \text{si } a \le x \le b \\ \frac{2}{(c-a)\cdot(c-b)} \cdot (c-x) & \text{si } b < x \le c \end{array} \right\}$$

PASO 0. Halle la función de densidad acumulada de probabilidad F(x).

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{lr} \int_a^x \frac{2}{(c-a)\cdot(b-a)} \cdot (x-a)\cdot dx = \frac{(x-a)^2}{(c-a)\cdot(b-a)} & \text{si } a \le x \le b \\ \frac{(b-a)}{(c-a)} + \int_b^x \frac{2}{(c-a)\cdot(c-b)} \cdot (c-x)\cdot dx = \frac{(c-x)^2}{(c-a)\cdot(c-b)} & \text{si } b < x \le c \end{array} \right\}$$

PASO 1. Iguale la función de densidad acumulada de probabilidad F(x) a un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1).

$$F(x) = R \quad \rightarrow \quad F(x) \left\{ \begin{array}{lr} \frac{(x-a)^2}{(c-a)\cdot(b-a)} = R & \text{si } a \le x \le b \\ 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-a)\cdot(c-b)} = R & \text{si } b < x \le c \end{array} \right\}$$

PASO 2. Despeje de la anterior igualdad la variable aleatoria x.

$$x = \left\{ \begin{array}{lr} a + \sqrt{(c-a)\cdot(b-a)\cdot R} & \text{si } R \le \frac{(b-a)}{(c-a)} \\ c - \sqrt{c-a)\cdot(c-b)\cdot(1-R)} & \text{si } R > \frac{(b-a)}{(c-a)} \end{array} \right\}$$

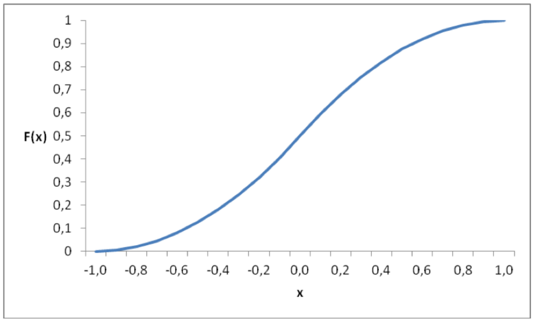
PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la anterior expresión.

Ejemplo 4.8

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue la distribución siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Solución



PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la expresión hallada en el PASO 2.

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} a + \sqrt{(c-a)\cdot(b-a)\cdot R} = -1 + \sqrt{2 \cdot R} & \text{si } R \leq 0{,}5 \\ c - \sqrt{(c-a)\cdot(c-b)\cdot(1-R)} = -1 - \sqrt{2\cdot(1-R)} & \text{si } R > 0{,}5 \end{array} \right\}$$

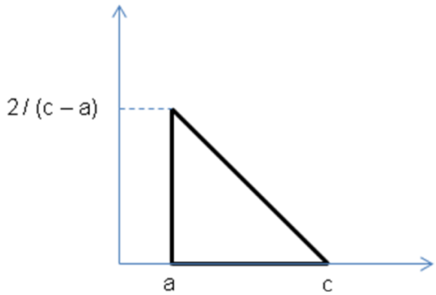
Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,048 de donde el valor de la variable aleatoria

$$x = -1 + \sqrt{2 \cdot R} = -1 + \sqrt{2 \times 0{,}048} = -0{,}69016133$$

En el caso de que el triángulo sea isósceles la función de densidad y la función de densidad acumulada de probabilidad son respectivamente:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4\cdot(x-a)}{(c-a)^2} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{4\cdot(c-x)}{(c-a)^2} & \text{si } b < x \leq c \end{array} \right\} \qquad F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\cdot(x-a)^2}{(c-a)^2} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{2\cdot(c-x)^2}{(c-a)^2} & \text{si } b < x \leq c \end{array} \right\}$$

Siendo b = (a + c)/2. Y en el caso de que el triángulo sea rectángulo:

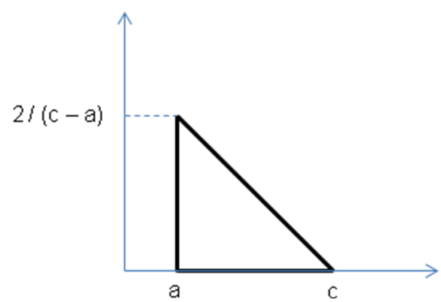


$$f(x) = \left\{ \frac{2 \cdot (c-x)}{(c-a)^2} \quad \text{si } a \leq x \leq c \right\}$$

$$F(x) = \left\{ 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-a)^2} \quad \text{si } a \leq x \leq c \right\}$$

$$f(x) = \left\{ \frac{2 \cdot (x-a)}{(c-a)^2} \quad \text{si } a \leq x \leq c \right\}$$

$$F(x) = \left\{ \frac{(x-a)^2}{(c-a)^2} \quad \text{si } a \leq x \leq c \right\}$$



La distribución triangular constituye una buena aproximación para el modelado de variables de las cuales conoce los valores mínimo, máximo y más probable. Lo propio sucede con la distribución parabólica.

4.2.6 Distribución Geométrica

$$F(x) = 1 - (1 - p)^x \qquad \text{siendo } x > 0$$

PASO 1. Iguale la función de densidad acumulada de probabilidad F(x) a un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1).

$$F(x) = R \quad \rightarrow \quad 1 - (1 - p)^x = R$$

PASO 2. Despeje de la anterior igualdad la variable aleatoria x.

$$\boxed{x = \frac{\ln(1 - R)}{\ln(1 - p)}}$$

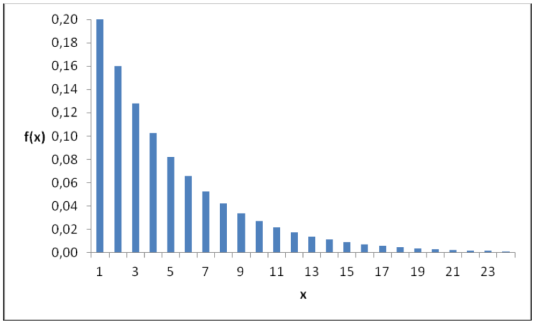
Como x tiene que ser entero, se elige el entero que satisface la siguiente relación.

$$\boxed{\frac{\ln(1 - R)}{\ln(1 - p)} < x \leq 1 + \frac{\ln(1 - R)}{\ln(1 - p)}}$$

PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la anterior expresión.

Ejemplo 4.9

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución geométrica de parámetro p = 2%.



Solución

PASO 3. Genere un número aleatorio R distribuido uniforme (0,1) y calcule el valor de la variable aleatoria x a partir de la expresión $x = \dfrac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)}$.

Mediante un generador de números aleatorios se ha generado el número aleatorio 0,048 de donde el valor de la variable aleatoria.

$$x = \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln(1-0{,}048)}{\ln(1-0{,}02)} = 2{,}43483427$$

Como x tiene que ser entero, se elige el entero que satisface la siguiente relación.

$$x = \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} < x \leq 1 + \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} \quad \rightarrow \quad x = 3$$

El procedimiento de la transformada inversa si bien es el más extendido, su aplicación requiere conocer explícitamente la función de distribución, lo que en determinados casos puede resultar una dificultad, de ahí que se hayan diseñado otros procedimientos para generar variables aleatorias.

4.3 Método de composición o método de mezclas

En este método la función de densidad f(x) se expresa como mezcla de m distribuciones de probabilidad $f_i(x)$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} A_i \cdot f_i(x) \qquad \text{donde } \sum_{i=1}^{m} A_i = 1$$

La selección de $f_i(x)$ se establece de manera que minimice el tiempo de cálculo requerido para generar valores de variables aleatorias a partir de $f_i(x)$.

PASO 1. Divida la distribución de probabilidad original en sub-áreas A_i.

PASO 2. Defina la función de densidad de probabilidad $f_i(x)$ de cada sub-área.

PASO 3. Exprese la función de densidad de probabilidad original f(x) en la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{m} A_i \cdot f_i(x)$ donde $\sum_{i=1}^{m} A_i = 1$

PASO 4. Determine la función de densidad acumulada de probabilidad $F_i(x)$ de cada una de las áreas.

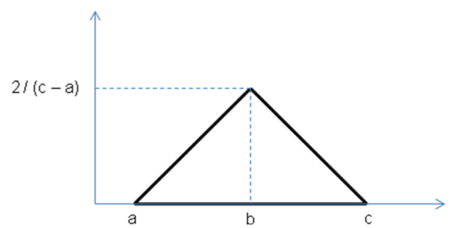
PASO 5. Mediante el método de la transformada inversa obtenga las expresiones que permitan generar variables aleatorias de cada una de las distribuciones $f_i(x)$.

PASO 6. Genere un número aleatorio R_1 que le permita definir el área a considerar.

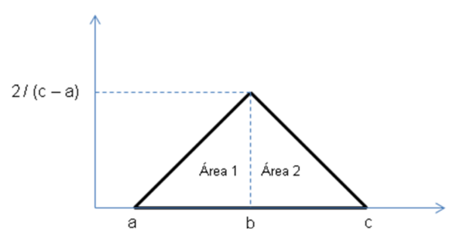
PASO 7. Seleccione la función generadora correspondiente a la función $f_i(x)$.

PASO 8. Genere otro número aleatorio R_2 y sustitúyalo en la anterior función generadora con el objetivo de calcular el valor de la variable aleatoria.

4.3.1 Distribución Triangular



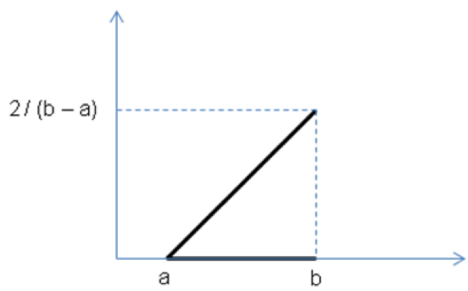
PASO 1. Divida la distribución de probabilidad original en sub-áreas A_i.



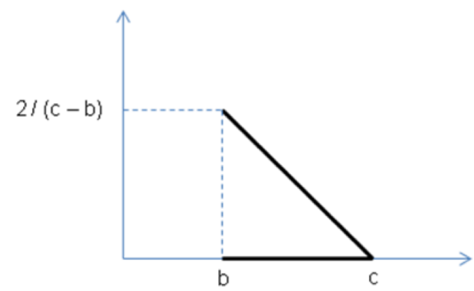
$$\text{Área 1} = \frac{(b-a)\cdot\frac{2}{(c-a)}}{2} = \frac{(b-a)}{(c-a)} \qquad a \le x \le b$$

$$\text{Área 2} = \frac{(c-b)\cdot\frac{2}{(c-a)}}{2} = \frac{(c-b)}{(c-a)} \qquad b < x \le c$$

PASO 2. Defina la función de densidad de probabilidad $f_i(x)$ de cada sub-área.



Área 1



Área 2

$$f_1(x) = \frac{2}{(b-a)^2} \cdot (x-a) \qquad a \le x \le b$$

$$f_2(x) = \frac{2}{(c-b)^2} \cdot (c-x) \qquad b < x \le c$$

PASO 3. Exprese la función de densidad de probabilidad original en la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{m} A_i \cdot f_i(x)$

$$f(x) = \frac{(b-a)}{(c-a)} \cdot \frac{2}{(b-a)^2} \cdot (x-a) + \frac{(c-b)}{(c-a)} \cdot \frac{2}{(c-b)^2} \cdot (c-x)$$

$$f(x) = \frac{2}{(c-a)\cdot(b-a)} \cdot (x-a) + \frac{2}{(c-a)\cdot(c-b)} \cdot (c-x)$$

PASO 4. Determine la función de densidad acumulada de probabilidad $F_i(x)$ de cada una de las áreas.

$$F_1(x) = \int_a^x \frac{2}{(b-a)^2} \cdot (x-a) \cdot dx = \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} \qquad a \leq x \leq b$$

$$F_2(x) = \int_b^x \frac{2}{(c-b)^2} \cdot (c-x) \cdot dx = 1 - \frac{(c-x)^2}{(c-b)^2} \qquad b < x \leq c$$

PASO 5. Mediante el método de la transformada inversa obtenga las expresiones que le permitan generar variables aleatorias de cada una de las distribuciones $f_i(x)$.

Iguale la función de densidad acumulada de probabilidad $F_i(x)$ de cada una de las áreas a un número aleatorio R_2 distribuido uniforme (0,1).

$$F_1(x) = \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} = R_2 \qquad a \leq x \leq b$$

$$F_2(x) = \frac{(c-x)^2}{(c-b)^2} = R_2 \qquad b < x \leq c$$

Despeje de la anterior igualdad la variable aleatoria x función de R_2.

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} a + \sqrt{R_2} \cdot (b-a) & \text{si } R_1 \leq \frac{(b-a)}{(c-a)} \\ c - \sqrt{(1-R_2)} \cdot (c-b) & \text{si } R_1 > \frac{(b-a)}{(c-a)} \end{array} \right\}$$

PASO 6. Genere un número aleatorio R_1 que le permita definir el área a considerar.

PASO 7. Seleccione la función generadora correspondiente a la función $f_i(x)$.

PASO 8. Genere otro número aleatorio R_2 y sustitúyalo en la función generadora con el objetivo de calcular el valor de la variable aleatoria.

Ejemplo 4.10

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue la distribución triangular de valor mínimo 2, moda 4 y valor máximo 8.

Solución

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} a + \sqrt{R_2} \cdot (b - a) & \text{si } R_1 \leq \frac{(b-a)}{(c-a)} \\ b - \sqrt{(1 - R_2)} \cdot (c - b) & \text{si } R_1 > \frac{(b-a)}{(c-a)} \end{array} \right\}$$

Para la distribución triangular de valor mínimo 2, moda 4 y valor máximo 8.

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} 2 + \sqrt{R_2} \times (4 - 2) = 2 + \sqrt{R_2} \times 2 & \text{si } R_1 \leq \frac{(4-2)}{(8-2)} = 0{,}33 \\ 8 - \sqrt{(1 - R_2)} \times (8 - 4) = 8 - \sqrt{(1 - R_2} \times 4 & \text{si } R_1 > \frac{(4-2)}{(8-2)} = 0{,}33 \end{array} \right\}$$

PASO 6. Genere un número aleatorio R_1 que le permita definir el área a considerar.

Mediante un generador se ha generado el número aleatorio 0,048

PASO 7. Seleccione la función generadora correspondiente a la función $f_i(x)$.

Dado que $R_1 = 0{,}048 \;\rightarrow\; R_1 \leq 0{,}33 \;\rightarrow\; x = 2 + \sqrt{R_2} \times 2$

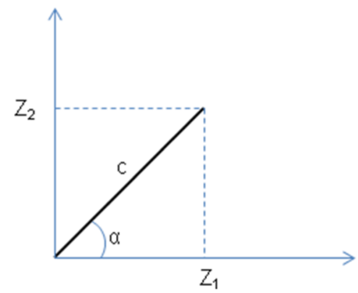
PASO 8. Genere otro número aleatorio R_2 y sustitúyalo en la función generadora con el objetivo de calcular el valor de la variable aleatoria.

Mediante un generador se ha generado el número aleatorio 0,591 de donde el valor de la variable aleatoria.

$$x = 2 + \sqrt{R_2} \cdot 2 = 2 + \sqrt{0{,}591} \times 2 = 3{,}53753049$$

4.4 Método de la transformación directa

Este método basado en el teorema de Pitágoras es utilizado para generar variables aleatorias Z que sigan una distribución normal N(0, 1).



De donde

$$\left.\begin{array}{r} c^2 = Z_1^2 + Z_2^2 \\ \sin\alpha = \frac{Z_2}{c} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} c = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \\ Z_2 = c \cdot \sin\alpha \end{array}\right\} \rightarrow Z_2 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \cdot \sin\alpha$$

La suma de n variables aleatorias distribuidas normal estándar sigue una distribución χ^2 con n grados de libertad, y dado que la función de densidad de una variable aleatoria χ^2 con dos grados de libertad es la misma que la de una distribución exponencial de media dos, aprovechando la expresión obtenida con anterioridad mediante el método de la transformada inversa para la generación de variables aleatorias exponenciales $x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - R)$ resulta:

$$Z_2 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \cdot \sin\alpha \rightarrow Z_2 = \sqrt{\chi_{n=2}^2} \cdot \sin\alpha \rightarrow Z_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin\alpha$$

Generando valores aleatorios del ángulo α entre 0 y 2 π mediante el método de la transformada inversa.

$$x = a + R \cdot (b - a) = 0 + R \cdot (2\pi - 0) = 2 \cdot \pi \cdot R$$

De donde

$$Z_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin \alpha = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot R_2)$$

Y la expresión que permite generar variables aleatorias normales

$$X = \mu + Z \cdot \sigma = \mu + [\sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot R_2)] \cdot \sigma$$

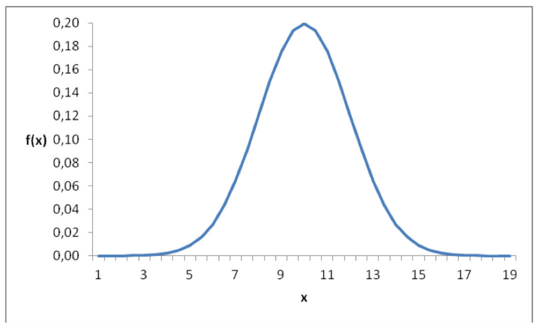
$$\boxed{X = \mu + \left[\sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot R_2)\right] \cdot \sigma}$$

Lo propio puede hacerse iniciando el procedimiento con Z_1 en cuyo caso:

$$\boxed{X = \mu + \left[\sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot R_2)\right] \cdot \sigma}$$

Ejemplo 4.11

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 10 y desviación estándar 2.



Solución

Mediante un generador se han generado los números aleatorios 0,043 y 0,155 de donde el valor de la variable aleatoria

$$X = \mu + \left[\sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot R_2)\right] \cdot \sigma$$

$$X = 10 + \left[\sqrt{-2 \times \ln(1 - 0{,}043)} \times \sin(2 \cdot \pi \times 0{,}155)\right] \times 2 = 10{,}490$$

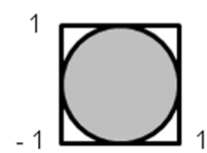
Del método anterior, conocido como método de Box-Müller o método polar, se deriva el **método polar de Marsaglia** que no requiere la evaluación del seno o del coseno. El método polar se basa en generar valores aleatorios en el cuadrado (- 1, 1) x (- 1, 1). Si el valor generado está dentro del círculo unidad exprese el valor aleatorio en función de este punto y si no lo está lo rechaza.

PASO 1. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos uniformemente (0, 1).

PASO 2. Genere valores aleatorios en el cuadrado (- 1, 1) x (- 1, 1)

$$x = a + (b - a) \cdot R_1 = -1 + (1 - (-1)) \cdot R_1 = -1 + 2 \cdot R_1$$

$$y = a + (b - a) \cdot R_2 = -1 + (1 - (-1)) \cdot R_2 = -1 + 2 \cdot R_2$$



$$v = x^2 + y^2 = (2 \cdot R_1 - 1)^2 + (2 \cdot R_2 - 1)^2$$

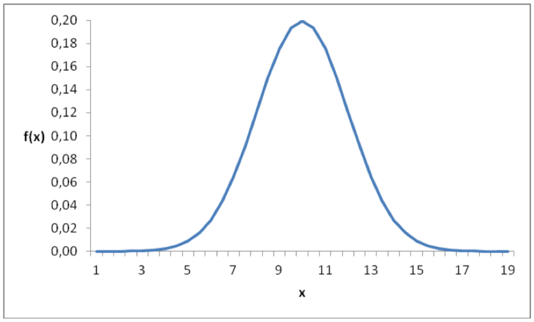
PASO 3. Si el valor generado está dentro del círculo unidad exprese el valor aleatorio en función de este punto y si no lo está lo rechaza.

$$v \leq 1 \quad \rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{-2 \cdot \ln(v)}{v}} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} x_1 = x \cdot s \\ y_1 = y \cdot s \end{matrix} \right\}$$

$v > 1 \quad \rightarrow$ Rechace el valor generado y vuelva al PASO 1

Ejemplo 4.12

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 10 y desviación estándar 2.



Solución

PASO 1. Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,043	0,155

PASO 2. Genere valores aleatorios en el cuadrado (- 1, 1) x (- 1, 1)

$$x = -1 + 2 \cdot R_1 = -1 + (2 \text{ x } 0{,}043) = -0{,}914$$

$$y = -1 + 2 \cdot R_2 = -1 + (2 \text{ x } 0{,}155) = -0{,}690$$

$$v = x^2 + y^2 = (-0{,}914)^2 + (-0{,}690)^2 = 1{,}3115$$

PASO 3. Si el valor generado está dentro del círculo unidad exprese el valor aleatorio en función de este punto, si no lo está lo rechaza.

$$v = 1{,}3115 > 1 \quad \rightarrow \quad \text{Rechaza el valor generado}$$

4.5 Método de convolución

Algunas variables aleatorias Y pueden generarse por la suma (convolución) de un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

$$\boxed{Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_k}$$

Así, si Y es la suma de dos variables aleatorias X_1 y X_2, la función de distribución de Y puede obtenerse analíticamente mediante la convolución de las funciones de distribución de X_1 y X_2.

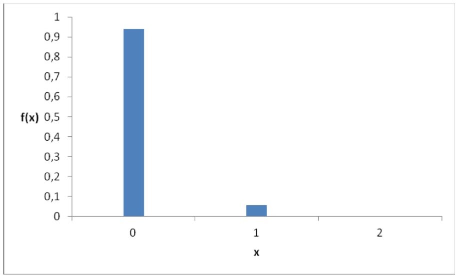
4.5.1 Distribución Binomial

Una variable aleatoria Binomial (n, p) puede generarse a partir de la suma de n variables aleatorias con distribución de Bernouilli de parámetro p.

$$\boxed{Y = BE_1 + BE_2 + \ldots + BE_n}$$

Ejemplo 4.13

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución Binomial de parámetros n = 3 y p = 2%.



Solución

La distribución de Bernouilli correspondiente

	0	**1**
Intervalo	0,00 - 0,98	0,98 - 1,00

Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,048	0,591	0,478

de donde el valor de la variable aleatoria

R_1	BE_1	R_2	BE_2	R_3	BE_3	Y
0,048	0	0,591	0	0,478	0	0

4.5.2 Distribución Binomial negativa

Una variable aleatoria Binomial negativa de parámetros p y k puede generarse a partir de la suma de n variables aleatorias X con distribución Geométrica de parámetro p.

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{k} X_i}$$

Ejemplo 4.14

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución Binomial negativa de parámetros p = 2% y el k-ésimo éxito k = 3.

Solución

Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,048	0,591	0,478

Calcule el valor de la variable aleatoria X con distribución geométrica a partir de la expresión $x = \dfrac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)}$.

$$X_1 = \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln(1-0{,}048)}{\ln(1-0{,}02)} = 2{,}43483427$$

$$X_3 = \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln(1-0{,}591)}{\ln(1-0{,}02)} = 44{,}2534809$$

$$X_3 = \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln(1-0{,}478)}{\ln(1-0{,}02)} = 32{,}1782463$$

Como x tiene que ser entero, se elige el entero que satisface la siguiente relación.

$$\frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} < x < 1 + \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 45 \\ x_3 = 33 \end{cases}$$

de donde el valor de la variable aleatoria

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 = 3 + 45 + 33 = 81$$

4.5.3 Distribución Normal

Una variable aleatoria con distribución normal puede engendrarse en virtud del teorema central del límite como suma de k variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_i de media μ y varianza σ^2, a medida que k se aproxime a infinito.

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots X_k \text{ sigue una distribución } N\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i, \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2\right)$$

En el caso de que las variables aleatorias X_i sigan una distribución uniforme (0, 1), es decir, se trate de números aleatorios R resulta:

$$Y = R_1 + R_2 + \ldots R_k \text{ sigue una distribución } N\left(k \cdot \frac{1}{2}, k \cdot \frac{1}{12}\right)$$

De donde el valor simulado de la variable aleatoria con distribución normal viene dado por la expresión:

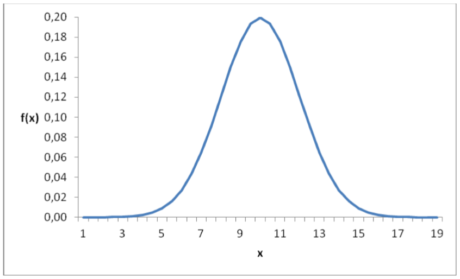
$$\boxed{X = \mu + Z \cdot \sigma = \mu + \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} R_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}}\right) \cdot \sigma}$$

Se ha comprobado que k = 12 además de facilitar los cálculos, proporciona valores simulados aceptables. En este caso $Y = R_1 + \ldots R_{12}$ sigue una distribución N(6, 1).

$$\boxed{X = \mu + \left(\sum_{i=1}^{12} R_i - 6 \right) \cdot \sigma}$$

Ejemplo 4.15

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 10 y desviación estándar 2.



Solución

Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,043	0,155	0,109	0,989	0,596	0,687
0,986	0,685	0,367	0,738	0,933	0,753

de donde el valor de la variable aleatoria

$$X = \mu + \left(\sum_{i=1}^{12} R_i - 6 \right) \cdot \sigma = 10 + (7{,}041 - 6) \times 2 = 12{,}082$$

El problema de este método es que requiere que k se aproxime a infinito. Doce no es precisamente un número suficientemente grande, si bien proporciona valores simulados aceptables. Además, aumentar el número de variables uniformes utilizadas requiere un notable esfuerzo computacional para generar un único valor.

4.5.4 Distribución Erlang

Una variable aleatoria k Erlang con media $1/\lambda$ puede crearse a partir de la generación de k variables aleatorias exponenciales con media $1/k \cdot \lambda$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots X_k$$

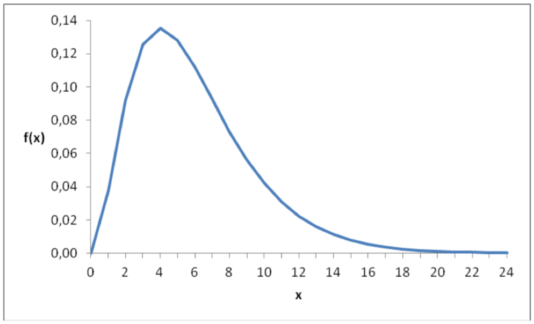
$$Y = -\frac{1}{k \cdot \lambda} \cdot \ln(1 - R_1) - \ldots - \frac{1}{k \cdot \lambda} \cdot \ln(1 - R_k) = -\frac{1}{k \cdot \lambda} \cdot \left[\ln(1 - R_1) + \ldots + \ln(1 - R_k)\right]$$

$$Y = -\frac{1}{k \cdot \lambda} \cdot \ln\left[(1 - R_1) \cdot (1 - R_2) \cdot \ldots \cdot (1 - R_k)\right] = -\frac{1}{k \cdot \lambda} \cdot \ln \prod_{i=1}^{k} (1 - R_i)$$

$$\boxed{Y = -\frac{1}{k \cdot \lambda} \cdot \ln \prod_{i=1}^{k} (1 - R_i)}$$

Ejemplo 4.16

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución 3 Erlang de media 2 minutos/individuo.



Solución

Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,048	0,591	0,478

de donde el valor de la variable aleatoria

$$Y = -\frac{1}{k \cdot \lambda} \cdot \ln \prod_{i=1}^{k} (1 - R_i) = -\frac{2}{3} \cdot \ln \prod_{i=1}^{3} (1 - R_i) = 1{,}06221204$$

4.5.5 Distribución Gamma

Una variable aleatoria Gamma (k, λ) siendo k un número natural, puede engendrarse a partir de la generación de k variables aleatorias exponenciales de parámetro λ.

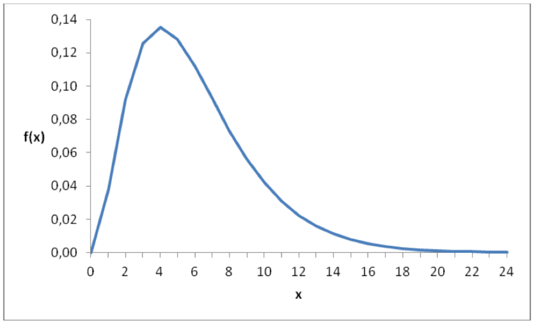
Gamma(k, λ) = Erlang(k, λ)   si k € N

$$Y = -\frac{1}{\lambda}\cdot\ln(1-R_1) - \ldots - \frac{1}{\lambda}(1-R_k) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\ln(1-R_i) = -\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\prod_{i=1}^{k}(1-R_i)$$

$$\boxed{Y = -\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\prod_{i=1}^{k}(1-R_i)}$$

Ejemplo 4.17

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución Gamma de parámetros k = 3 y λ = 0,5.



Solución

Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,048	0,591	0,478

de donde el valor de la variable aleatoria

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \prod_{i=1}^{k} (1 - R_i) = -\frac{1}{0{,}5} \cdot \ln \prod_{i=1}^{3} (1 - R_i) = 3{,}1866$$

Si k es un número fraccionario:

PASO 1. Hacer n = [k] y r = k – [k]

PASO 2. Genere n números aleatorios R distribuidos U(0, 1).

PASO 3. Evalúe $Y = -\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - R_i)$

PASO 4. Genere W = Beta(r, 1 – r)

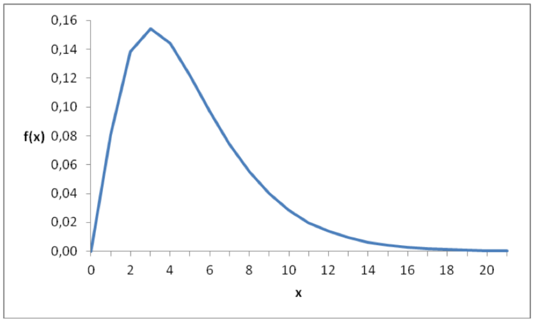
PASO 5. Genere un número aleatorio R distribuido uniformemente (0, 1).

PASO 6. Halle Z = - ln(R)

PASO 7. $X = \frac{Y + W \cdot Z}{\lambda}$ se distribuye gamma(k, λ)

Ejemplo 4.18

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución Gamma de parámetros k = 2,5 y λ = 0,5.



Solución

PASO 1. Hacer n = [k] = 2 y r = k – [k] = 2,5 – 2 = 0,5

PASO 2. Mediante un generador se han generado los números aleatorios 0,048 y 0,591

PASO 3. $Y = -\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - R_i) = -\ln(1 - R_1) - \ln(1 - R_2) = 0{,}94323037$

PASO 4. Genere W = Beta de parámetros α = r = 0,5 y β = 1 - r = 0,5

0,043	0,155

$$\left.\begin{array}{l} X = (R_1)^{1/\alpha} = (0{,}043)^{1/0{,}5} = 0{,}001849 \\ Y = (R_2)^{1/\beta} = (0{,}155)^{1/0{,}5} = 0{,}024025 \end{array}\right\} X + Y = 0{,}025874$$

$$W = \frac{X}{X+Y} = \frac{0{,}001849}{0{,}025874} = 0{,}0714617$$

PASO 5. Mediante un generador se ha generado el número aleatorio 0,109

PASO 6. Z = - ln(R) = - ln(0,109) = 2,2164074

PASO 7.

$$X = \frac{Y + W \cdot Z}{\lambda} = \frac{0{,}94323037 + 0{,}0714617 \times 2{,}2164074}{0{,}5} = 2{,}20323721$$

4.5.6 Distribución Beta

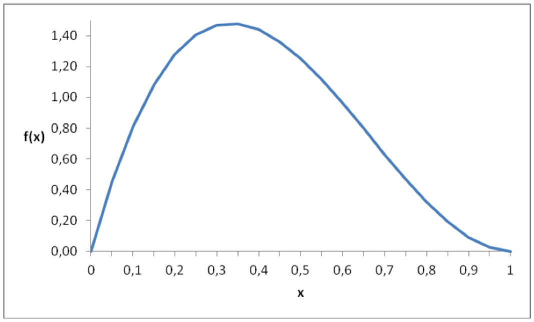
Una variable aleatoria Beta (α, β) siendo α y β números naturales, puede crearse a partir de la siguiente expresión:

$$\boxed{Y = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \ln(1 - R_i)}{\sum_{i=1}^{\alpha} \ln(1 - R_i) + \sum_{i=1}^{\beta} \ln(1 - R_i)}}$$

Dado que si una variable aleatoria X se distribuye gamma (α, λ) y una variable aleatoria Y se distribuye gamma (β, λ), la variable $\frac{X}{X+Y}$ sigue una distribución Beta (α, β).

Ejemplo 4.19

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución Beta (2, 3).



Solución

Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,043	0,155	0,591	0,478	0,048

de donde el valor de la variable aleatoria

$$Y = \frac{\ln(1-R_1)+\ln(1-R_2)}{\ln(1-R_1)+\ln(1-R_2)+\ln(1-R_3)+\ln(1-R_4)+\ln(1-R_5)} = 0{,}11761$$

Si α y β son números fraccionarios:

PASO 1. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos uniformemente (0, 1).

PASO 2. Evalúe

$$X = (R_1)^{1/\alpha} \qquad Y = (R_2)^{1/\beta}$$

PASO 3. Sí X + Y > 1 vaya al PASO 1

PASO 4. $\dfrac{X}{X+Y}$ se distribuye beta(α, β)

Ejemplo 4.20

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución Beta con parámetros α = 1,5 y β = 2,5.

Solución

PASO 1. Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,048	0,591

PASO 2. Evalúe

$$X = (R_1)^{1/\alpha} = (0{,}048)^{1/1{,}5} = 0{,}1321 \qquad Y = (R_2)^{1/\beta} = (0{,}591)^{1/2{,}5} = 0{,}8103$$

PASO 3. Sí X + Y > 1 vaya al PASO 1

X + Y = 0,1321 + 0,8103 = 0,9424

PASO 4. El valor de la variable aleatoria

$$\frac{X}{X+Y} = \frac{0{,}1321}{0{,}9424} = 0{,}1402$$

4.5.7 Distribución χ^2 de Pearson a partir de la distribución Normal

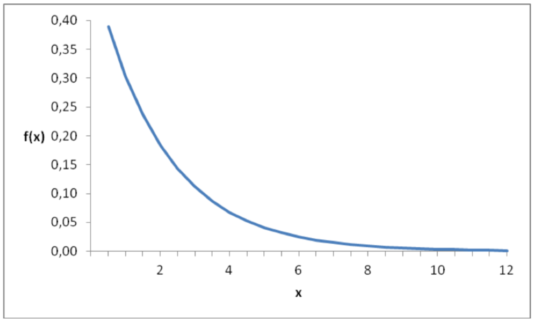
Una variable aleatoria Chi cuadrado puede engendrarse a partir de n variables aleatorias z_i distribuidas N (0, 1) dado que una variable aleatoria distribuida χ^2 es igual a:

$$\boxed{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2}$$

Siendo n el número de grados de libertad de la variable aleatoria. Basta pues generar n variables aleatorias distribuidas N (0, 1), elevarlas al cuadrado y sumarlas.

Ejemplo 4.21

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución de Pearson con 2 grados de libertad.



Solución

Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,043	0,155	0,591	0,478

Genere n = 2 variables aleatorias distribuidas N (0, 1)

$$Z = \mu + \left[\sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot R_2)\right] \cdot \sigma$$

$$Z = 0 + \left[\sqrt{-2 \times \ln(0{,}043)} \cdot \sin(2 \times \pi \times 0{,}155)\right] \times 1 = 0{,}245$$

$$Z = 0 + \left[\sqrt{-2 \times \ln(0{,}591)} \times \sin(2 \cdot \pi \times 0{,}478)\right] \times 1 = 0{,}184$$

Eleve al cuadrado las n variables aleatorias generadas

$$Z_1^2 = (0{,}245)^2 = 0{,}060025$$

$$Z_2^2 = (0{,}184)^2 = 0{,}033856$$

de donde el valor de la variable aleatoria con distribución de Pearson y 2 grados de libertad:

X = 0,060025 + 0,033856 = 0,093881

4.5.8 Distribución χ^2 de Pearson a partir de la distribución

Gamma

La distribución Chi cuadrado es un caso especial de la distribución gamma. En concreto, la distribución χ^2 es equivalente a la distribución:

$$\boxed{\text{Gamma} = \left(k = \frac{n}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right)}$$

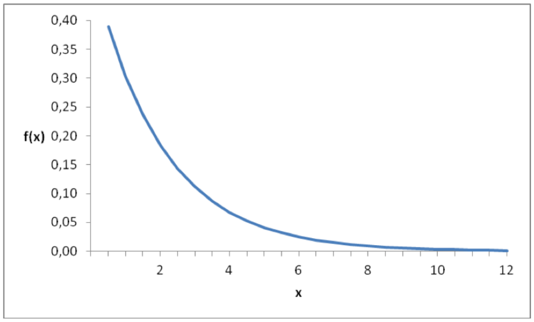
Si **<u>n es par</u>** la distribución χ^2 = Gamma $\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ = Erlang $\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

PASO 1. Genere k = n/2 números aleatorios R distribuidos U(0, 1).

PASO 2. $X = -2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \ln R_i$ se distribuye χ^2 con n grados de libertad.

Ejemplo 4.22

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución de Pearson con 2 grados de libertad.



Solución

PASO 1. Genere k = n/2 = 2/2 = 1 número aleatorio R distribuido uniformemente (0, 1). Mediante un generador se ha generado el número aleatorio 0,043

PASO 2. $X = -2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \ln R_i = -2 \cdot \ln R_1 = -2 \times \ln 0{,}043 = 6{,}293$

Si **<u>n es impar</u>** X = Y + Z^2 siendo Y distribuida Gamma $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y Z distribuida N(0, 1).

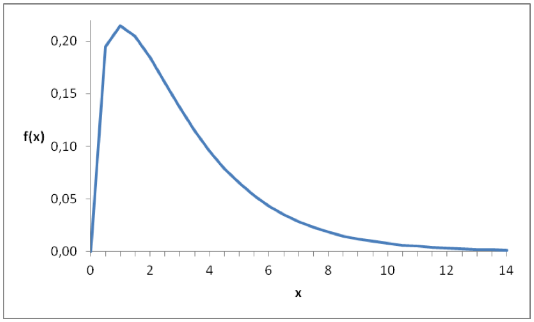
PASO 1. Genere k = (n – 1)/2 números aleatorios R distribuidos uniformemente (0, 1).

PASO 2. Genere Z distribuida normal (0, 1).

PASO 3. $X = -2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \ln R_i + Z^2$ se distribuye χ^2 con n grados de libertad.

Ejemplo 4.23

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución de Pearson con 3 grados de libertad.



Solución

PASO 1. Genere k = (n – 1)/2 = 2/2 = 1 número aleatorio R distribuido uniformemente (0, 1). Mediante un generador se ha generado el número aleatorio 0,043

PASO 2. Genere Z distribuida normal (0, 1).

Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,043	0,155

De donde

$$Z = \mu + \left[\sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot R_2)\right] \cdot \sigma$$

$$Z = 0 + \left[\sqrt{-2 \times \ln(1 - 0{,}043)} \times \sin(2 \times \pi \times 0{,}155)\right] \times 1 = 0{,}245$$

PASO 3. $X = -2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \ln R_i + Z^2 = -2 \times \ln 0{,}043 + (0{,}245)^2 = 6{,}353025$

Lo propio puede hacerse con las distribuciones de Student y la de Fisher Snedecor. Así, una variable aleatoria t_n de Student puede crearse a partir de la expresión $\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$ donde Y se distribuye χ_n^2 y Z Normal (0, 1). Por su parte, una variable aleatoria $F_{m,n}$ de Fisher Snedecor con m y n grados de libertad puede generarse a partir de la expresión $\frac{X/m}{Y/n}$ donde Y es una variable aleatoria distribuida χ_n^2 y X una variable aleatoria distribuida χ_m^2.

Ejemplo 4.24

Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución de Student con 3 grados de libertad.

Solución

PASO 1. Genere Y distribuida χ_n^2.

Para ello genere k = (n – 1)/2 = 2/2 = 1 número aleatorio R distribuido uniformemente (0, 1). Mediante un generador se ha generado el número aleatorio 0,043.

Genere además Z distribuida normal (0, 1). Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,043	0,155

De donde

$$Z = \mu + \left[\sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot R_2)\right] \cdot \sigma$$

$$Z = 0 + \left[\sqrt{-2 \times \ln(1 - 0{,}043)} \times \sin(2 \times \pi \times 0{,}155)\right] \times 1 = 0{,}245$$

$$Y = -2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \ln R_i + Z^2 = -2 \times \ln 0{,}043 + (0{,}245)^2 = 6{,}353025$$

PASO 2. Genere otra variable Z distribuida normal (0, 1) independiente de la anterior. Mediante un generador se han generado los números aleatorios

0,851	0,155

De donde

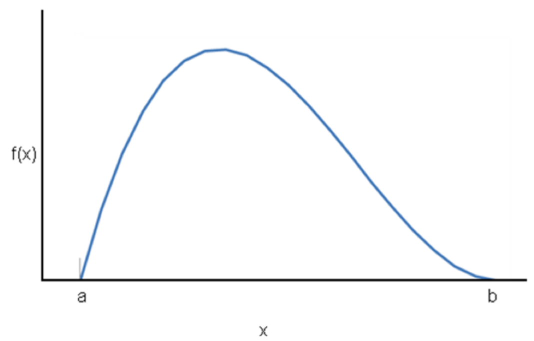
$$Z = \mu + \left[\sqrt{-2 \cdot \ln(1 - R_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot R_2)\right] \cdot \sigma$$

$$Z = 0 + \left[\sqrt{-2 \times \ln(1 - 0{,}851)} \times \sin(2 \times \pi \times 0{,}155)\right] \times 1 = 1{,}61389213$$

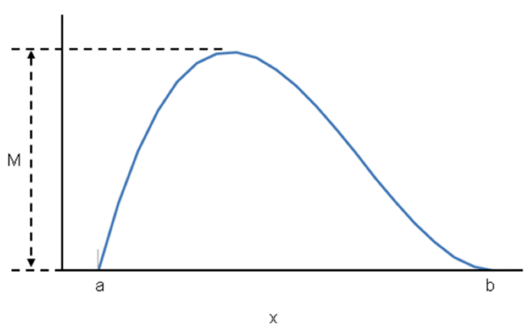
PASO 3. $\dfrac{Z}{\sqrt{Y/n}} = \dfrac{1{,}61389213}{\sqrt{6{,}353025/3}} = 1{,}10903397$

4.6 Método de aceptación - rechazo

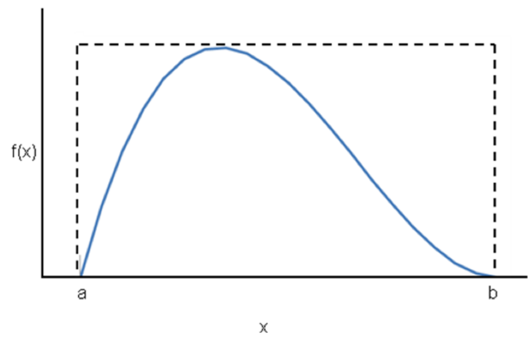
El método de aceptación rechazo simula un valor de la variable aleatoria x con función de densidad de probabilidad f(x) acotada en el intervalo (a, b)



Sea M un valor tal que $M \geq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.



El procedimiento consiste en generar puntos aleatoriamente en el rectángulo de base (a, b) y altura (0, M). Las coordenadas del punto i vienen dadas por el par (x_i, y_i).



Si el punto cae dentro de la gráfica de la función de densidad se acepta su coordenada x como valor de la variable aleatoria con función de densidad f(x), en caso contrario el punto es rechazado y debe generar otro. Los puntos aceptados se distribuyen uniformemente bajo la curva f(x). Como la probabilidad de que un punto caiga bajo la curva es igual al cociente entre el número de puntos aceptados y generados, la distribución de valores aceptados tiene a f(x) como función de densidad de probabilidad. El método consiste pues en generar un valor de la variable aleatoria y probar si dicho valor proviene de la distribución de probabilidad que está estudiando.

PASO 1. Halle M tal que $M \geq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

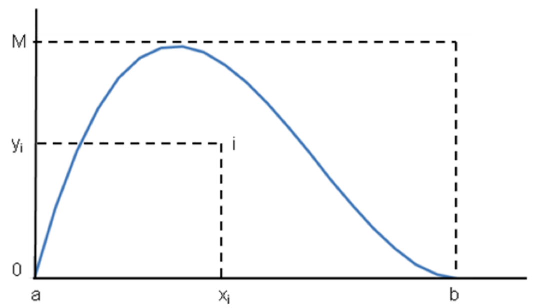
PASO 2. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos uniformemente (0, 1).

PASO 3. Determine las coordenadas (x_i, y_i) del punto generado.

$$x_i = a + (b - a) \cdot R_1$$

$$y_i = 0 + (M - 0) \cdot R_2 = M \cdot R_2 \quad \rightarrow \quad R_2 = \frac{y_i}{M}$$

y_i es un valor de la variable aleatoria R(0, M) y x_i es un valor de la variable aleatoria R(a, b).



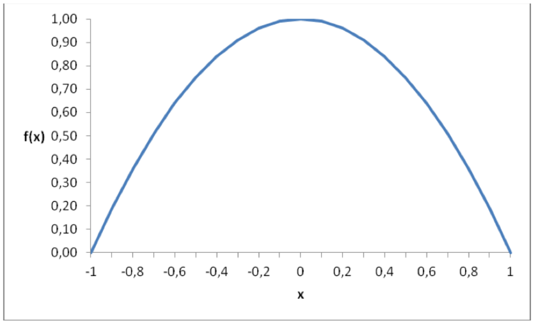
PASO 4. Evalúe $f(x_i)$ la función de probabilidad en $x_i = a + (b - a) \cdot R_1$.

PASO 5. Si $R_2 \leq \frac{f(x_i)}{M}$, es decir si $y_i \leq f(x_i)$, entonces x_i se distribuye según f(x) y por tanto se acepta como valor generado de la variable aleatoria X, en caso contrario volver al PASO 2.

La probabilidad de que $y_i \leq f(x_i)$ (probabilidad de aceptación) es $f(x)/M$. Si un número $x = a + (b - a) \cdot R_1$ es elegido al azar y rechazado si $y_i > f(x)$, la distribución de probabilidad de las x aceptadas es f(x). Siendo M el número esperado de intentos para que x sea aceptada como una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad f(x).

Ejemplo 4.25

Simule el comportamiento de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad $f(x) = 1 - x^2$ si $-1 \leq x \leq 1$.

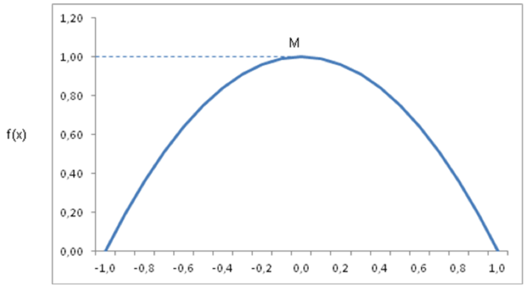


Solución

PASO 1. Halle M tal que M ≥ f(x) para todo x ∈ (a, b).

$$1 - x^2 \leq M \quad \rightarrow \quad M = 1$$

Dado que x = 0 es el máximo de la función $1 - x^2$ con f(x = 0) = 1



PASO 2. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos U(0, 1).

0,851	0,155

PASO 3. Determine las coordenadas (x_1, y_1) del punto generado.

$$x_1 = a + (b - a) \cdot R_1 = (-1) + (1 - (-1)) \cdot 0{,}851 = 0{,}702$$

$$y_1 = M \cdot R_2 = 1 \cdot 0{,}155 = 0{,}155$$

PASO 4. Evalúe $f(x_1)$ la función de probabilidad en $x_1 = a + (b - a) \cdot R_1$.

$$f(x_1) = f(0{,}702) = 1 - (0{,}702)^2 = 0{,}507196$$

PASO 5. Si $R_2 \leq \frac{f(x_1)}{M}$ entonces x_1 se distribuye según f(x), en caso contrario volver al PASO 2.

$$\frac{f(x_1)}{M} = \frac{0{,}507196}{1} = 0{,}507196 \quad \rightarrow \quad R_2 \leq 0{,}507196$$

Como $R_2 = 0{,}155$ es menor que 0,507196 el valor simulado de la variable aleatoria X = 0,702.

Ejemplo 4.26

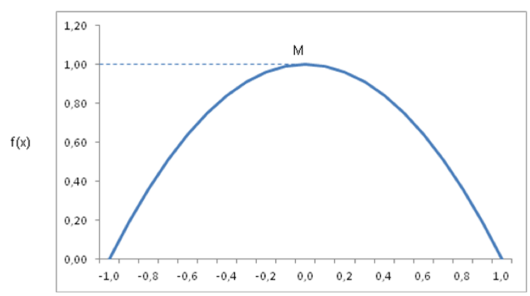
Simule el comportamiento de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad $f(x) = 1 - x^2$ si $-1 \leq x \leq 1$.

Solución

PASO 1. Halle M tal que M ≥ f(x) para todo x ∈ (a, b).

$$1 - x^2 \leq M \quad \rightarrow \quad M = 1$$

Dado que x = 0 es el máximo de la función con f(x = 0) = 1



PASO 2. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos U(0, 1).

0,043	0,155

PASO 3. Determine las coordenadas (x_1, y_1) del punto generado.

$$x_1 = a + (b - a) \cdot R_1 = (-1) + (1 - (-1)) \cdot 0{,}043 = -0{,}914$$
$$y_1 = M \cdot R_2 = 1 \cdot 0{,}155 = 0{,}155$$

PASO 4. Evalúe $f(x_1)$ la función de probabilidad en $x_1 = a + (b - a) \cdot R_1$.

$$f(x_1) = f(-0{,}914) = 1 - (-0{,}914)^2 = 0{,}164604$$

PASO 5. Si $R_2 \leq \frac{f(x_1)}{M}$ entonces x_1 se distribuye según $f(x)$, en caso contrario volver al PASO 2.

$$\frac{f(x_1)}{M} = \frac{0{,}164604}{1} = 0{,}164604 \;\rightarrow\; R_2 \leq 0{,}164604$$

Como $R_2 = 0{,}155$ es menor que 0,164604 el valor simulado de la variable aleatoria X = - 0,914.

Ejemplo 4.27

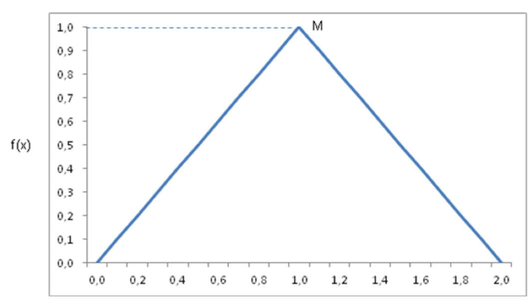
Simule el comportamiento de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad $f(x) = \begin{Bmatrix} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{Bmatrix}$

Solución

PASO 1. Halle M tal que M ≥ f(x) para todo x ∈ (a, b).

$$\begin{Bmatrix} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{Bmatrix} \leq M \quad \rightarrow \quad M = 1$$

Dado que x = 1 es el máximo de la función $\begin{Bmatrix} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{Bmatrix}$ con f(x = 1) = 1



PASO 2. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos U(0, 1).

0,043	0,155

PASO 3. Determine las coordenadas (x_1, y_1) del punto generado.

$$x_1 = a + (b - a) \cdot R_1 = 0 + (2 - 0) \cdot 0{,}043 = 0{,}086$$
$$y_1 = M \cdot R_2 = 1 \cdot 0{,}155 = 0{,}155$$

PASO 4. Evalúe $f(x_1)$ la función de probabilidad en $x_1 = a + (b - a) \cdot R_1$.

$$f(x_1) = f(0{,}086) = 0{,}086$$

PASO 5. Si $R_2 \leq \frac{f(x_1)}{M}$ entonces x_1 se distribuye según f(x), en caso contrario volver al PASO 2.

$$\frac{f(x_1)}{M} = \frac{0{,}086}{1} = 0{,}086 \;\rightarrow\; R_2 > 0{,}086$$

Como $R_2 = 0{,}155$ es mayor que 0,086 rechaza x_1 y debe volver al **PASO 2**.

Este procedimiento especialmente relevante para distribuciones triangulares y trapezoidales presenta tres inconvenientes:

1. El soporte tiene que ser un intervalo acotado. Muchas distribuciones no cumplen esta hipótesis.
2. La envolvente sea rectangular. Dependiendo de la distribución pueden existir envolventes mejores.
3. La probabilidad de rechazar x_i es elevada, lo que implica desperdiciar números aleatorios.

Estas dificultades dieron lugar a la siguiente generalización del método de aceptación rechazo. Dada f(x) la función de densidad de una variable aleatoria de la que desea obtener valores simulados y la función de densidad g(x) elegida por el decisor de forma que f(x) ≤ M · g(x) siendo M ≥ 1, es decir, g ha de contener f (g es una envolvente de f).

Si bien no hay nada establecido sobre cuál es la mejor envolvente g(x), resulta conveniente elegir la más parecida posible a la función a generar siempre que sea sencillo obtener valores simulados de ella. Por su parte, el mejor valor de M es aquel que minimiza la probabilidad de rechazo, luego debe elegir el menor valor posible.

$$\text{P(aceptar x)} = P\left(R \le \frac{f(x)}{M \cdot g(x)}\right) = \frac{1}{M} \;\rightarrow\; M = \max\left\{\frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) > 0\right\}$$

PASO 1. Elija la envolvente g(x).

PASO 2. Halle el valor menor de M que cumple que f(x) ≤ M · g(x)

PASO 3. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos U(0, 1).

PASO 4. Determine el valor de la variable aleatoria x de acuerdo con g.

PASO 5. Si $R_2 \leq \dfrac{f(x)}{M \cdot g(x)} \rightarrow x$ caso contrario volver al PASO 3.

Observe que el método visto con anterioridad es un caso particular del método generalizado en el que la envolvente es una distribución uniforme.

Ejemplo 4.28

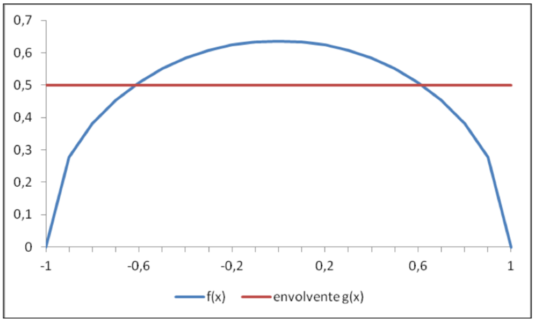
Simule el comportamiento de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}$ si - 1 ≤ x ≤ 1.

Solución

PASO 1. Elija la envolvente g(x).

Se elige como envolvente la función de densidad g(x) = 1/2 uniforme en el intervalo (-1, 1)

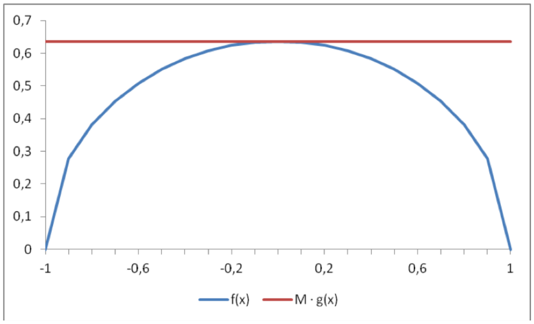
$$g(x) = \frac{1}{2} \qquad -1 \leq x \leq 1$$



PASO 2. Halle el valor menor de M que cumple que f(x) ≤ M · g(x)

$$\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2} \leq M \cdot \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad M = \frac{4}{\pi}$$

Dado que x = 0 es el máximo de la función $\sqrt{1-x^2}$ con f(x = 0) = 1



PASO 3. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos U(0, 1).

0,851	0,155

PASO 4. Determine el valor de la variable aleatoria x de acuerdo con g.

$$x = a + (b - a) \cdot R_1 = (-1) + (1 - (-1)) \cdot 0{,}851 = 0{,}702$$

PASO 5. Si $R_2 \leq \dfrac{f(x)}{M \cdot g(x)} \quad \rightarrow \quad x$ caso contrario volver al PASO 3.

$$\frac{f(x)}{M \cdot g(x)} = \frac{\frac{2}{\pi} \times \sqrt{1-x^2}}{\frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(0{,}702)^2} = 0{,}71217694$$

Como R_2 = 0,155 es menor que 0,71217694 el valor simulado de la variable aleatoria X = 0,702. Siendo la eficiencia del algoritmo del

$$\frac{1}{M} = \frac{\pi}{4} = 0{,}78539816 \quad \rightarrow \quad 78{,}54\,\%$$

El 78,54% de los puntos generados uniformemente bajo M · g(x) estarán también bajo f(x) y por lo tanto serán aceptados.

4.6.1 Distribución Normal estándar

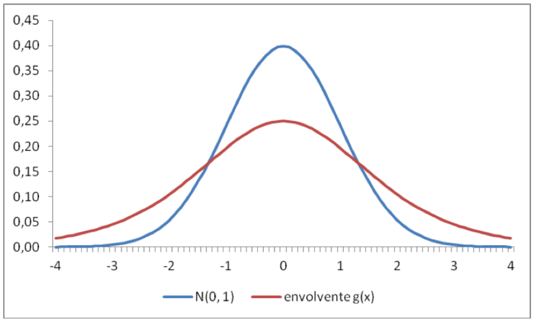
Simule el comportamiento de una variable aleatoria que sigue una distribución N(0, 1).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$$

PASO 1. Elija la envolvente g(x).

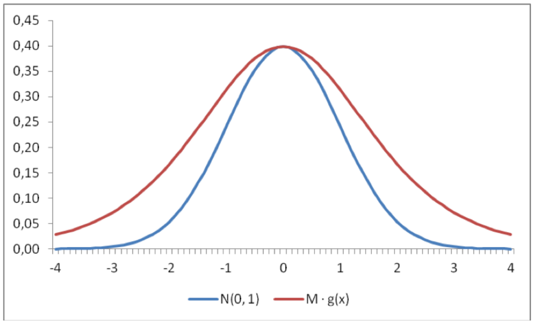
Se elige como envolvente la función logística cuya función de densidad

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$



PASO 2. Halle el valor menor de M que cumple que f(x) ≤ M · g(x)

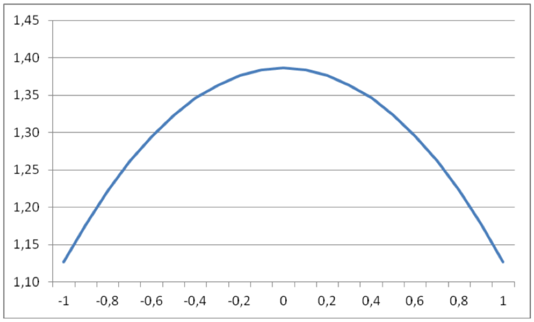
$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \leq M \cdot \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \quad \rightarrow \quad M = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$$



Dado que x = 0 es el máximo de la función $\left\{-\frac{1}{2}\cdot x^2 + x + 2\cdot \ln(1+e^{-x})\right\}$ con f(x = 0) = 1,38629436

$$\ln e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2} - \ln e^{-x} + \ln(1+e^{-x})^2 \le \ln M \cdot \sqrt{2\cdot \pi}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot x^2 + x + 2\cdot \ln(1+e^{-x}) \le \ln M \cdot \sqrt{2\cdot \pi}$$



PASO 3. Genere dos números aleatorios R_1 y R_2 distribuidos U(0, 1).

0,851	0,155

PASO 4. Determine el valor de la variable aleatoria x de acuerdo con g. Para ello calcule en primer lugar la función de distribución G(x).

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \rightarrow G(x) = \int \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \cdot dx = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

De donde, la transformada inversa:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = R_1 \quad \rightarrow \quad x = -\ln \frac{1-R_1}{R_1} = -\ln \frac{1-0{,}851}{0{,}851} = 1{,}7424658$$

PASO 5. Si $R_2 \leq \dfrac{f(x)}{M \cdot g(x)} \rightarrow$ x caso contrario volver al PASO 3.

$$\frac{f(x)}{M \cdot g(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \times e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}}{\frac{4}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \times \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}} = \frac{0{,}08741992}{0{,}20234584} = 0{,}4320322$$

Como R_2 = 0,155 es menor que 0,4320322 el valor simulado de la variable aleatoria X = 1,7424658.

El principal inconveniente de este método es que para cada distribución debe elegir la envolvente más adecuada.

4.7 Actividades

Dados los números pseudoaleatorios siguientes.

0,0701	0,2591	0,3486	0,6339	0,0969

Ejercicio 4.7.1

Genere cinco observaciones de una variable aleatoria que sigue una distribución de Bernoulli con p = 25%.

Ejercicio 4.7.2

Genere, mediante la técnica de la transformada inversa, cinco observaciones de una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{8} \cdot x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{array} \right\}$$

4.8 Solución actividades

Ejercicio 4.7.1

x = 0 si R $\in$ (0,00 - 0,75)

x = 1 si R $\in$ (0,75 - 1,00)

De donde las cinco observaciones de la variable aleatoria:

Número aleatorio	Valor de la variable
0,0701	0
0,2591	0
0,3486	0
0,6339	0
0,0969	0

Ejercicio 4.7.2

$$x = \left\{ \begin{array}{cc} \sqrt[4]{32 \times R} & \text{si } R \leq 0{,}5 \\ \sqrt[2]{2 \times (R + 1{,}5)} & \text{si } R > 0{,}5 \end{array} \right\}$$

De donde las cinco observaciones de la variable aleatoria:

Número aleatorio	Valor de la variable
0,0701	1,2238
0,2591	1,6969
0,3486	1,8276
0,6339	2,0659
0,0969	1,3270

5 Bibliografía y Lecturas recomendadas

Ten presente que las cosas que te metes en la cabeza
están ahí para siempre.

Cormac McCarthy

Asmussen, S., & Glynn, P.W. (2007). *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*. Springer

Azarang, M.R., & García Dunna, E. (1996). *Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos*. McGraw Hill.

Banks, J., Pritsker, A., Vincent, S. L'Ecuyer, P. Cheng, R. Kleijnen, J. et al. (1998). *Handbook of Simulation: Principles, Methodology, Advances, Applications, and Practice*. Wiley. *https://doi.org/10.1002/9780470172445*

Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., & Nicol, D.M. (2014). *Discrete Event System Simulation.* Person Education.

Bratley, P., Fox, B.L., & Schrage, L.E. (2012). *A guide to simulation*. Springer.

Coss, R. (2012). *Simulación. Un enfoque práctico*. Limusa.

Ernshoff, J.R., & Sisson, R.L. (1971). *Design and Use of Computer Simulation Models*. Macmillan.

Evans, J.R., & Olson, D.L. (2001). *Introduction to Simulation and Risk Analysis*. Prentice Hall.

Fishman, G. (2003). *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications.* Springer Series in Operations Research & Financial Engineering.

Fishman, G. (2006). *A First Course in Monte Carlo*. Duxbury.

Fishman, G. (2013). *Discrete Event System Simulation: Modeling, Programming, and Analysis*. Springer Science & Business Media.

Gentle, J.E. (2003). *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Springer.

Glasserman, P. (2014). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer.

Gordon, G. (1989). *Simulación de sistemas*. Diana.

Hartvigsen, D. (2016). *SimQuick: Process Simulation with Excel*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Jain, R. (2015). *Art of Computer Systems Performance Analysis: Techniques For Experimental Design Measurements Simulation and Modeling.* Wiley.

Kalos, M.H., & Whitlock, P. A. (2009). *Monte Carlo Methods*. Wiley.

Kroese, D.K., Taimre, T., & Botev, Z.I. (2011). *Handbook of Monte Carlo Methods*. Wiley series in probability and statistics. *https://doi.org/10.1002/9781118014967*

Law, A.M. (2014). *Simulation Modelling and Analysis*. McGraw Hill Education.

Lehmer, D.H. (1951). Mathematical methods in large scale computing units. *Proc. 2nd Sympos. on Large Scale Digital Computing Machinery.* 141 - 146. Hardvard University Press.

McHaney, R. (2016). *Computer Simulation: A Practical Perspective*. Trillas. Butterworth-Heinemann.

Meier, R.C., Newell, W., & Pazer, H. (1975). *Técnicas de simulación en administración y economía*. Trillas.

Morgan, B.J.T. (2014). *Elements of simulation*. Springer.

Naylor, T.H., Balintfy, J.L., Joseph L., Burdick, D., & Kong Chu (1982). *Técnicas de Simulación en Computadoras*. Limusa.

Naylor, T.H., & Boughton, J.M. (1977). *Experimentos de simulación en computadoras con modelos de sistemas económicos*. Limusa.

Rios, D., & Rios, S. (2008). *Simulación. Métodos y Aplicaciones*. Ra-Ma.

Ripley, B.D. (2008). *Stochastic Simulation*. Wiley Series in Probability and Statistics.

Robert, C.P., & Casella, G. (2010). *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Texts in Statistics.

Robert, C.P., & Casella, G. (2010). *Introducing Monte Carlo Methods with R*. Springer Verlag. *https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1576-4*

Ross, S.M. (2013). *Simulation*. Academic Press.

Rubinstein, R.Y., & Kroese, D.P. (2009). *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley Series in Probability and Statistics.

Rubinstein, R.Y., Ridder, A., & Vaisman, R. (2013). *Fast Sequential Monte Carlo Methods for Counting and Optimization*. Wiley Series in Probability and Statistics. *https://doi.org/10.1002/9781118612323.ch4*

Winston, W.L., & Reilly, T. (2000). *Modelos Financieros con Simulación y Optimización*. Palisade.

Winston, W.L. (2001). *Simulation Modeling Using @RISK*. Duxbury Press.

Winston, W.L., & Albright, S.C. (2015). *Practical Management Science*. South Western College.

El libro ha sido concebido para acercar la simulación numérica a los estudiantes de las diversas Facultades, Escuelas Técnicas y Escuelas de Negocios con el objetivo de facilitarles el aprendizaje de la toma de decisiones en el ámbito de la gestión de organizaciones y dotar a los profesionales de una metodología para la toma de decisiones que les permita evaluar el comportamiento de su organización frente a las diferentes decisiones que puedan adoptar, lo que les posibilitará la elección de la mejor de ellas.

Uno de los principales retos del libro es conseguir que el lector aprenda a construir modelos de situaciones reales y llevar a cabo experimentos sin un software específico, lo que le facultará para crear sus propios modelos y adoptar así las mejores decisiones posibles.

La simulación no es más que una herramienta de análisis que permite sacar conclusiones sin necesidad de trabajar directamente con el sistema real. El avance de la informática, en especial de las hojas de cálculo permite llevar a cabo simulaciones complejas en una sencilla hoja de cálculo accesible en cualquier ordenador, ofreciendo a los decisores la posibilidad de evaluar el comportamiento del sistema frente a sus decisiones antes de tomarlas, sin afectar al sistema y a coste prácticamente cero.

science