

# 10

## Análisis no-lineal de materiales compuestos mediante la teoría de mezclas serie-paralelo

**Xavier Martínez, Sergio Oller y Fernando Rastellini**

**Resumen** El presente capítulo presenta la teoría de mezclas serie-paralelo. Esta es una formulación para la simulación del comportamiento mecánico de materiales compuestos, que permite obtener el comportamiento no lineal de los mismos a partir del comportamiento que muestran sus materiales componentes. Esta formulación se puede aplicar tanto a los compuestos laminados de fibras de carbono como a materiales compuestos más tradicionales como puede ser el hormigón armado. La validez de la formulación presentada se probará con la reproducción de un ensayo de delaminación de un compuesto laminado. La ventaja de la teoría de mezclas serie-paralelo frente a otras formulaciones existentes para el cálculo de materiales compuestos es que esta es, hoy en día, la única capaz de tener en cuenta el comportamiento no lineal de los compuestos con un coste computacional que hace posible la resolución de estructuras reales.

### 10.1. Introducción

En muchas de las simulaciones que se realizan hoy en día de estructuras de materiales compuestos, estos se consideran un único material cuyas propiedades mecánicas se obtienen o bien a partir de resultados experimentales, o bien mediante formulaciones desarrolladas

---

**Xavier Martínez, Sergio Oller**

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech, C/ Gran Capitán s/n, Ed. C1, 08034 Barcelona, España

*e-mail:* x.martinez@upc.edu

**Fernando Rastellini**

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)

Quantech ATZ. c/ Esteve Terradas nº 5, Ed. C3, Campus del Baix Llobregat, 08860 Castelldefels, Barcelona, España

DOI: [10.3926/oms.208](https://doi.org/10.3926/oms.208) • Omnia Publisher, 2014

específicamente para el compuesto en cuestión. Este enfoque obliga a repetir los ensayos o a adaptar la formulación en caso de que la configuración del compuesto sufra alguna variación.

Otra de las limitaciones que tienen muchas de las formulaciones que se utilizan en la simulación de materiales compuestos es que estas son válidas únicamente en el rango lineal del material. Esto reduce la posibilidad de saber la capacidad resistente real de la estructura, ya que en el caso de los materiales compuestos, el fallo de alguno de sus componentes no tiene por qué suponer el fallo del material y, mucho menos, el fallo de toda la estructura.

Actualmente existen dos teorías capaces de dar solución a los problemas mencionados: la teoría de homogenización y la teoría de mezclas serie/paralelo. Estas teorías, en lugar de considerar el compuesto un único material, obtienen la respuesta del mismo a partir del comportamiento de sus materiales componentes. Ambas formulaciones se centran, pues, en la simulación de los materiales componentes y en el modo en que la respuesta de estos materiales puede utilizarse para obtener el comportamiento final del compuesto.

La teoría de homogenización se basa en la caracterización del material compuesto a partir de un enfoque de doble escala. En una escala macro se obtiene el comportamiento de la estructura y el compuesto es tratado como un único material. La respuesta de este único material se obtiene de la escala micro, en la que se simula la estructura interna del material compuesto. La relación entre ambas escalas se obtiene imponiendo la periodicidad de la escala micro dentro de la macro [18, 26]. El principal problema del método de homogenización es su elevado coste computacional. Cada vez que se quiere obtener el comportamiento del compuesto es necesario resolver el modelo micro. Esta limitación es la responsable de que hoy en día el método de homogenización se utilice únicamente para resolver casos lineales, en los que únicamente es necesario resolver el micro-modelo al inicio de la simulación [4]; o para resolver pequeñas estructuras, normalmente limitadas al campo académico [1, 29].

La otra teoría que permite obtener la respuesta de los materiales compuestos una vez estos entran en el rango no lineal es la teoría de mezclas serie-paralelo. Esta consiste en realizar una homogenización fenomenológica del compuesto a partir del comportamiento constitutivo de sus materiales componentes. Esta teoría tiene sus fundamentos en la teoría de mezclas inicialmente formulada por Trusdell y Toupin [28], quienes propusieron obtener el comportamiento del material compuesto a partir de dos hipótesis:

1. Todos los componentes del compuesto sufren la misma deformación (condición de iso-deformación).
2. Cada constituyente contribuye a la tensión final proporcionalmente a su participación volumétrica en el compuesto.

A partir de esta primera formulación, y manteniendo estas mismas hipótesis, Car [8] propuso un primer modelo con el que simular el comportamiento no lineal de los materiales compuestos. La formulación desarrollada por Car fue más tarde mejorada por Rastellini [24, 25] para poder considerar materiales en los que alguna de sus direcciones tuviesen un comportamiento de iso-tensión, en lugar de iso-deformación.

Si bien la complejidad del material compuesto que se puede abordar con la teoría de homogenización es mucho mayor que en el caso de la teoría de mezclas, cuya aplicación queda limitada (a no ser que se apliquen correcciones sobre la formulación) a compuestos laminados

de fibras largas, esta última tiene la ventaja de que su coste computacional es sustancialmente menor que en el caso de la homogenización, siendo posible la simulación de grandes estructuras teniendo en cuenta el comportamiento no lineal del material compuesto.

El presente capítulo está dividido en tres apartados. A continuación se realiza una pequeña descripción de los métodos más comunes que se utilizan actualmente para la simulación de materiales compuestos. Esta sección también incluye una pequeña descripción de la teoría de homogenización. A continuación se describe la teoría de mezclas serie-paralelo. Esta descripción contiene tanto los fundamentos teóricos de la teoría, como la forma en que esta se debe implementar en un proceso de cálculo estructural. Posteriormente se muestran unos ejemplos que ilustran el funcionamiento de la formulación presentada, así como su potencialidad para la simulación de estructuras de materiales compuestos. El capítulo concluye con una breve descripción de las capacidades de la formulación, si se introducen pequeños cambios en la misma.

## 10.2. Breve estado de la técnica

Los materiales compuestos, igual que la mayor parte de los materiales que se utilizan con fines estructurales, tienen un primer comportamiento elástico que pasa a no-lineal a partir de un cierto estado tensional. Muchas de las formulaciones existentes para la simulación de los compuestos definen como se deben calcular las constantes elásticas del material y proporcionan una ley con la que verificar si se ha superado el límite elástico del mismo. Una simulación basada en estas formulaciones corresponde a un cálculo lineal hasta rotura del compuesto. Los métodos más comunes para realizar este tipo de simulaciones se describen en la primera parte de esta sección. En caso de querer obtener el comportamiento del compuesto, una vez se ha superado el límite elástico, es necesario utilizar otro tipo de formulaciones como pueden ser la teoría de mezclas serie/paralelo o la teoría de homogenización. La segunda parte de esta sección proporciona una breve descripción de esta última.

### 10.2.1. Cálculo lineal hasta rotura del compuesto

#### 10.2.1.1. Propiedades elásticas del compuesto

La respuesta elástica de un material cualquiera a un conjunto de esfuerzos queda determinada por su matriz de rigidez. Esta establece la relación que hay entre las tensiones y las deformaciones en el material. En una formulación bidimensional, la expresión más genérica de la relación entre tensión y deformación mediante la matriz de rigidez es [20]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10.1)$$

Luego, las características mecánicas del compuesto quedarán determinadas por las constantes elásticas  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$  y  $G_{xy}$ . Los compuestos laminados suelen ser materiales ortótropos, puesto que en la dirección de las fibras la rigidez del material es mucho mayor que en la dirección perpendicular, esto hace que cada una de las constantes elásticas definidas en la ecuación 10.1 tenga un valor diferente.

Como se ha comentado en la introducción del capítulo, estas constantes se obtienen muchas veces de forma experimental. En el caso de compuestos laminados, las suele proporcionar el fabricante. No obstante, existen varios métodos con los que se pueden obtener las constantes elásticas del compuesto a partir de las propiedades de los materiales componentes. Algunos de los métodos más comunes se pueden obtener de las referencias [5, 11]. También es posible obtener las propiedades elásticas de un compuesto laminado mediante la aplicación web [www.cadec-online.com](http://www.cadec-online.com). Esta web permite al usuario, a partir de la definición de las propiedades mecánicas de las fibras y la matriz, determinar las características mecánicas de una lámina, así como la combinación de distintas láminas para crear un laminado.

El método más común para obtener las propiedades mecánicas del compuesto es aplicar la teoría de mezclas para obtener el módulo de Young en la dirección de la fibra y el módulo de Poisson; y aplicar la teoría de mezclas inversa para obtener el resto de propiedades mecánicas. De este modo se obtiene:

$$\begin{aligned}
 c_{E_x} &= f_{\nu} f_{E_x} + m_{\nu} m_E \\
 c_{\nu_{xy}} &= f_{\nu} f_{\nu_{xy}} + m_{\nu} m_{\nu} \\
 \frac{1}{c_{E_y}} &= \frac{f_{\nu}}{f_{E_y}} + \frac{m_{\nu}}{m_E} \\
 \frac{1}{c_{G_{xy}}} &= \frac{f_{\nu}}{f_{G_{xy}}} + \frac{m_{\nu}}{m_G}
 \end{aligned} \tag{10.2}$$

donde los superíndices  $c_{\diamond}$ ,  $f_{\diamond}$  y  $m_{\diamond}$  se refieren al compuesto, a la fibra y a la matriz, respectivamente; y  $f_{\nu}$  y  $m_{\nu}$  son la participación volumétrica de la fibra y la matriz en el laminado.

### 10.2.1.2. Rotura del material compuesto

En una simulación elástica hasta rotura es necesario definir un criterio a partir del cual el material pierde su comportamiento elástico y, por tanto, las relaciones establecidas entre tensión y deformación pierden su validez. Es importante remarcar que este punto determina la carga máxima que se puede aplicar sobre el compuesto sabiendo que este mantiene las propiedades elásticas definidas, pero no la máxima carga que se puede aplicar a la estructura; ya que hay modos de fallo de los materiales compuestos que no tienen por qué reducir la capacidad portante de los mismos. Un ejemplo se tienen en un compuesto delaminado sometido a tracción: por más que no haya conexión entre las láminas, la capacidad de carga a tracción del compuesto no se ve reducida.

Según Sun *et al.* [27], los métodos más comunes para predecir el fallo del compuesto son el de máxima deformación o máxima tensión. Esto es, se definen unos límites de máxima deformación o tensión, respectivamente, para cada una de las direcciones del compuesto y se considerará que el compuesto ha roto cuando se alcancen alguno de estos límites.

El problema de los criterios de máxima deformación y tensión es que no tienen en cuenta la interacción entre los distintos esfuerzos aplicados al material. Para subsanar esto, existen criterios que combinan las distintas tensiones que afectan al material en un mismo punto. Siguiendo este enfoque, los dos criterios que gozan de mayor popularidad son los de Tsai-Hill y Tsai-Wu [5], en los que se comparan las tensiones en el material con unos límites resistentes del mismo ( $\sigma_1^F$ ,  $\sigma_2^F$  y  $\tau_{12}^F$ ) que deben obtenerse de forma experimental.

El criterio de Tsai-Hill es:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^{F2}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^{F2}} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^{F2}} + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{12}^{F2}} = 1 \quad (10.3)$$

Y el criterio de Tsai-Wu es:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{66} \tau_{12}^2 = 1 \quad (10.4)$$

siendo,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\sigma_1^T} + \frac{1}{\sigma_1^C}; & F_2 &= \frac{1}{\sigma_2^T} + \frac{1}{\sigma_2^C}; & F_{12} &= \frac{1}{2} \sqrt{F_{11} F_{22}}; \\ F_{11} &= -\frac{1}{\sigma_1^T \sigma_1^C}; & F_{22} &= -\frac{1}{\sigma_2^T \sigma_2^C}; & F_{66} &= \left( \frac{1}{\tau_{12}^S} \right)^2 \end{aligned} \quad (10.5)$$

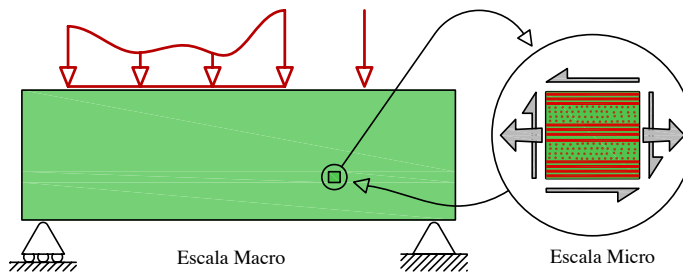
donde los subíndices  $\diamond^T$ ,  $\diamond^C$  y  $\diamond^S$  corresponden a las resistencias de tracción, compresión y cortante, respectivamente.

### 10.2.2. Breve reseña sobre homogenización

La teoría de homogenización consiste en analizar el comportamiento de la estructura en una doble escala, haciendo uso de la periodicidad que presenta la escala inferior o micro, dentro de la escala superior o macro. La complejidad de esta teoría hace que una descripción detallada de la misma quede fuera del alcance de este libro. No obstante, en esta sección se dan unas nociones básicas que permitirán tener una primera idea sobre el funcionamiento de esta teoría.

Una representación esquemática del método de homogenización se puede ver en la Figura 10.1, en la que se muestra que la escala macro resuelve el problema estructural dividiendo el dominio en un conjunto de volúmenes representativos *RVE* (*Representative Volume Element*). La deformación en cada uno de los puntos del modelo macro producida por las cargas aplicadas corresponde a las condiciones de borde que se aplicarán sobre el modelo micro. La simulación de este *RVE* proporciona la respuesta del compuesto, que se devuelve al modelo macro para continuar con la simulación. En otras palabras, la teoría de homogenización sustituye la ecuación constitutiva del material compuesto por un micro-modelo del mismo.

Este enfoque permite simular estructuras realizadas con materiales cuya micro-estructura sea suficientemente compleja para no poder ser descrita con una simple ecuación constitutiva. Un ejemplo de estos materiales son los laminados realizados con tejidos de fibras de carbono, en los que una ecuación constitutiva no es capaz de capturar la interacción entre las fibras del tejido, y las distintas capas del laminado. Del mismo modo, el método también permite



**Figura 10.1:** Método de homogenización aplicado a una viga de materiales compuestos.

caracterizar cualquier modo de fallo del que sea susceptible el material. En el caso de los materiales compuestos, algunos fallos característicos son la rotura de la matriz o la fibra, la desalineación de la fibra, etc.

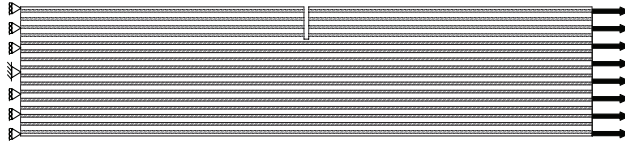
Uno de los mayores retos de un método de homogenización es la transferencia de la información entre los distintos modelos (macro/micro). Para ello es imprescindible la periodicidad de la estructura micro en la macro. Puede que una de las descripciones más simples de cómo realizar esta transferencia de información sea la descrita en el libro de Barbero [4]. En este se indica cómo transformar el tensor de deformaciones del modelo macro en un campo de desplazamientos que se aplicará al modelo micro, junto con una serie de condiciones de periodicidad. Una vez resuelto el micro-modelo, la suma de las fuerzas en el modelo proporciona un campo de fuerzas que se puede transformar en las tensiones que afectan a la macro.

Otra posible solución es la propuesta por Zalamea en su tesis doctoral [29], la cual fue mejorada posteriormente por Badillo en la suya [1]. Estos tienen en cuenta la posible modificación de las condiciones de periodicidad debido a la distorsión de la celda. Para ello la transferencia de información entre ambos modelos se realiza mediante multiplicadores de Lagrange.

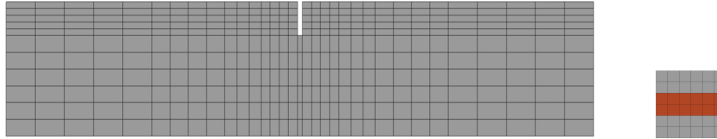
La complejidad existente para establecer una relación entre el modelo macro y micro se ve incrementada cuando se pierden las condiciones de periodicidad. Este es el caso de estructuras en las que hay zonas de distintos materiales, o en caso de que se produzca una rotura o degradación de rigidez en el material. En estos casos, los elementos frontera entre las distintas zonas se deben tratar con condiciones especiales, tal como se muestra en [1].

Finalmente, no se puede dejar de mencionar el coste computacional que supone realizar una simulación mediante la teoría de homogenización. Si bien la reducción de tiempo en comparación con un micro-modelo completo de la pieza puede ser significativa, el coste global de la simulación sigue siendo muy elevado si se quiere aplicar esta teoría a la resolución de grandes estructuras. A continuación se muestra una simulación realizada por Badillo para mostrar este coste. La estructura a resolver es la que se puede ver en la Figura 10.2.

El modelo homogenizado consiste en dos mallas de elementos finitos. Una correspondiente al macro-modelo y otra con la que se obtiene el comportamiento micro. En este caso, las mallas utilizadas son las que se muestran en la Figura 10.3.



**Figura 10.2:** Estructura resuelta mediante el método de homogenización.



**Figura 10.3:** Malla para el modelo macro y micro con los que simular la estructura.

El tiempo requerido, en un computador con 8 procesadores, para realizar 20 pasos de carga con el modelo homogenizado fue de 30 minutos. Sustancialmente inferior a los 70 minutos que se requieren para resolver esta misma estructura con un micro-modelo completo. No obstante, estos 30 minutos siguen siendo un tiempo muy elevado si lo que se pretende es resolver una estructura completa como puede ser una viga reforzada con *FRP* (*Fibre Reinforced Polymer*).

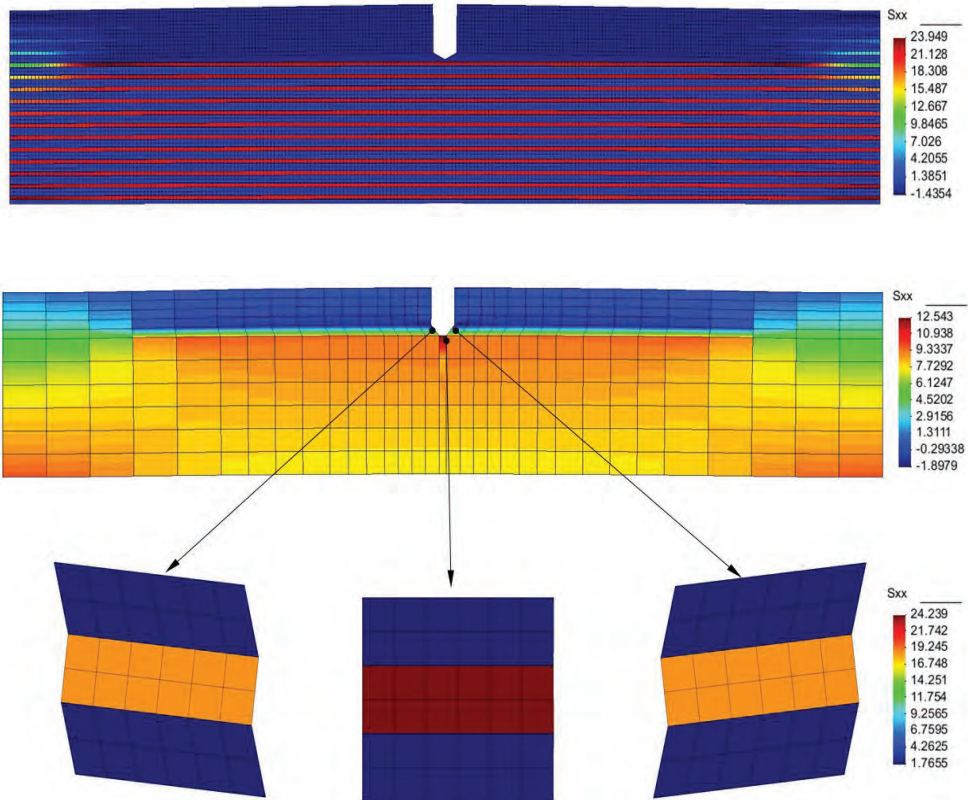
A continuación se muestra una comparación de las tensiones que se obtienen con un micro-modelo completo y el modelo homogenizado (véase Figura 10.4). Esta figura, además de mostrar la similitud de los resultados obtenidos, también permite ver como es la salida de resultados de un modelo homogenizado, en la que es necesario estudiar el modelo micro si se quiere tener un conocimiento preciso de lo que pasa en el material.

Luego, en base a todo lo expuesto, queda constatada la potencialidad del método de homogenización para la resolución de estructuras de materiales compuestos con una micro-estructura compleja. Se han visto también las dificultades y complejidades del método. Estas hacen que actualmente sea inabordable la resolución de una estructura completa mediante la teoría de homogenización. No obstante, este es un método que está ganando fuerza a medida que aumenta la capacidad de cálculo de los ordenadores.

### 10.3. Teoría de mezclas serie-paralelo

La teoría de mezclas serie-paralelo (SP) se puede definir como una homogenización fenomenológica, en la que el comportamiento del compuesto se obtiene a partir de la respuesta constitutiva de sus materiales componentes. Mediante esta, es posible tener en cuenta el comportamiento no lineal del material compuesto sin requerir el enorme coste computacional que supone la homogenización.

Esta teoría ha sido desarrollada por Rastellini [24, 25] y es una evolución de la teoría de mezclas en paralelo desarrollada por Car en [8, 9]. En la teoría de mezclas en paralelo se parte de las condiciones de compatibilidad definidas por Trusdell y Toupin [28] para desa-



**Figura 10.4:** Comparación las tensiones  $S_{xx}$  obtenidas con un micro-modelo y el modelo homogenizado. Arriba: distribución de las tensiones (MPa). Geometría deformada  $\times 200$ . Abajo: distribución de esfuerzos a escala global y local (MPa). Geometría deformada a escala global  $\times 200$  y a escala local  $\times 50$ .

rollar una formulación capaz de acoplar los comportamientos constitutivos de  $N$  materiales componentes, independientemente de los modelos que se utilicen para simular cada uno de ellos (elasticidad, plasticidad, daño, etc.). Las condiciones de compatibilidad de la teoría de mezclas en paralelo son:

1. Cada volumen infinitesimal del material compuesto contiene un número finito ( $N$ ) de materiales componentes.
2. La contribución de cada componente al comportamiento global del compuesto es directamente proporcional a su participación volumétrica en el compuesto.
3. El volumen de cada componente es significativamente menor que el volumen del compuesto.
4. Los distintos materiales componentes se suponen perfectamente ligados (no existe deslizamiento relativo entre ellos).
5. Todos los componentes sufren las mismas deformaciones en el compuesto (condición de iso-deformación).



Mediante estas condiciones, es posible obtener la respuesta del compuesto a partir del comportamiento de sus materiales constitutivos. La condición de iso-deformación permite conocer las deformaciones en cada uno de estos materiales y, a partir de estas, utilizando la ecuación constitutiva de cada componente, es posible obtener las tensiones en cada uno de los materiales simples. Estas tensiones se utilizarán posteriormente para obtener la tensión del compuesto. Una descripción más detallada de esta teoría se puede obtener en las referencias previamente mencionadas.

### 10.3.1. Condiciones de compatibilidad de la teoría de mezclas SP

Las condiciones de compatibilidad de la teoría de mezclas serie-paralelo son idénticas a las condiciones de compatibilidad de la teoría en paralelo, con la única excepción de que se modifica la condición de iso-deformación (condición 5) y se añade una condición 6. Esto es:

5. Todos los componentes sufren las mismas deformaciones en una determinada dirección (normalmente la dirección en que están orientadas las fibras).
6. Todos los componentes están sometidos a la misma tensión en las direcciones restantes (condición de iso-tensión).

De modo que esta nueva teoría define un comportamiento diferenciado, según la dirección que estemos considerando del material compuesto [25]. Este enfoque coincide con la forma en que se obtienen las constantes elásticas del compuesto, como se ha mostrado en la ecuación 10.2. del presente capítulo.

Aunque habitualmente la dirección que se considera que trabaja en paralelo coincide con la dirección en que están orientadas las fibras en el laminado, la teoría no hace ningún supuesto al respecto y es posible definir un material compuesto con todos los componentes en paralelo, o un material con todos los componentes en serie. Para ello es necesario definir  $\mathbf{e}_1$ , vector que determina las direcciones en paralelo del compuesto. A partir de este se define:

$$\mathbf{N}_P = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (10.6)$$

Y, utilizando  $\mathbf{N}_P$  es posible obtener el tensor proyector de cuarto orden que definirá los componentes en paralelo de las tensiones y deformaciones del material compuesto:

$$\mathbb{P}_P = \mathbf{N}_P \otimes \mathbf{N}_P \quad (10.7)$$

El tensor que define los componentes en serie queda determinado por el complementario:

$$\mathbb{P}_S = \mathbb{I} - \mathbb{P}_P \quad (10.8)$$

Mediante estos dos tensores es posible calcular las componentes en serie y en paralelo de las tensiones y las deformaciones del material compuesto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_P &= \mathbb{P}_P : \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\sigma}_S &= \mathbb{P}_S : \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_P &= \mathbb{P}_P : \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon}_S &= \mathbb{P}_S : \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (10.9)$$

Del mismo modo que las tensiones y las deformaciones del compuesto se pueden dividir entre aquellas que trabajan en serie y en paralelo, también la matriz de rigidez ( $\mathbf{C}$ ) sufre esta

división, de modo que la relación entre las tensiones y deformaciones se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_P \\ \boldsymbol{\sigma}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{PP} & C_{PS} \\ C_{SP} & C_{SS} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_P \\ \boldsymbol{\epsilon}_S \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

donde:

$$\begin{aligned} C_{PP} &= \mathbb{P}_P : \mathbb{C} : \mathbb{P}_P & C_{PS} &= \mathbb{P}_P : \mathbb{C} : \mathbb{P}_S \\ C_{SP} &= \mathbb{P}_S : \mathbb{C} : \mathbb{P}_P & C_{SS} &= \mathbb{P}_S : \mathbb{C} : \mathbb{P}_S \end{aligned} \quad (10.11)$$

Una vez definidas las direcciones características del compuesto, es posible aplicar las condiciones de compatibilidad en las que se basa la teoría de mezclas serie-paralelo. Para ello limitaremos el número de materiales componentes a dos: fibra y matriz. Si bien la teoría no exige esta limitación, la posterior implementación de la misma sería muy compleja si no se impone. Limitar el compuesto a dos componentes no solo permite reducir la complejidad del problema, sino que queda justificado por el hecho de que la mayoría de los compuestos están formados por dos únicos materiales (fibra y matriz). Luego, la aplicación de las condiciones de compatibilidad, considerando únicamente dos componentes, se puede escribir como:

$$\text{Dirección en paralelo: } \begin{cases} {}^c \boldsymbol{\epsilon}_P = {}^f \boldsymbol{\epsilon}_P = {}^m \boldsymbol{\epsilon}_P \\ {}^c \boldsymbol{\sigma}_P = {}^f \nu {}^f \boldsymbol{\sigma}_P + {}^m \nu {}^m \boldsymbol{\sigma}_P \end{cases} \quad (10.12)$$

$$\text{Dirección en serie: } \begin{cases} {}^c \boldsymbol{\epsilon}_S = {}^f \nu {}^f \boldsymbol{\epsilon}_S + {}^m \nu {}^m \boldsymbol{\epsilon}_S \\ {}^c \boldsymbol{\sigma}_S = {}^f \boldsymbol{\sigma}_S = {}^m \boldsymbol{\sigma}_S \end{cases} \quad (10.13)$$

donde los superíndices  ${}^c$ ,  ${}^f$  y  ${}^m$  hacen referencia al compuesto, fibra y matriz, respectivamente.

### 10.3.2. Algoritmo de resolución

En el apartado anterior se han definido las relaciones entre tensión y deformación que deben cumplir los materiales componentes, así como la forma que toman las tensiones y deformaciones del material compuesto. En este apartado se definirá el modo en que se debe proceder para calcular cada una de estas tensiones y deformaciones.

En un cálculo estructural el parámetro conocido es la deformación del material compuesto ( ${}^c \boldsymbol{\epsilon}$ ) para un determinado paso de carga. A partir de este valor, la teoría de mezclas serie-paralelo ha de determinar las tensiones en el compuesto. Esto se logra mediante las ecuaciones 10.12 y 10.13, a partir de las tensiones de los materiales componentes. Estas tensiones se obtienen a partir de las deformaciones, utilizando la ecuación constitutiva con la que se haya caracterizado cada uno de los componentes del compuesto. Luego, para calcular las tensiones en el compuesto, es necesario conocer las deformaciones que sufren cada uno de sus materiales componentes.

La obtención de las deformaciones de los materiales en la dirección en paralelo es de muy fácil obtención ya que coincide con la deformación del compuesto (ecuación 10.12). Por otro lado la deformación en la dirección en serie es de cálculo algo más complejo (ecuación

ción 10.13). En caso de materiales elásticos, dado un incremento de deformación del compuesto, el incremento de deformación que corresponde a la matriz se puede obtener como:

$${}^m\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_S = \mathbb{A} : \left[ {}^f\mathbb{C}_{SS} : {}^c\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^f\nu \left( {}^f\mathbb{C}_{SP} - {}^m\mathbb{C}_{SP} \right) : {}^c\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P \right] \quad (10.14)$$

siendo  $\mathbb{A} = \left[ {}^m\nu {}^f\mathbb{C}_{SS} + {}^f\nu {}^m\mathbb{C}_{SS} \right]^{-1}$ .

A partir del incremento de deformación del material matriz, el incremento de deformación del material fibra se puede calcular como:

$${}^f\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_S = \frac{1}{{}^f\nu} {}^c\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_S - \frac{{}^m\nu}{{}^f\nu} {}^m\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_S \quad (10.15)$$

Una vez conocidas las deformaciones en paralelo y serie de los materiales fibra y matriz, es posible recomponerlas para obtener las deformaciones totales de ambos materiales. La tensión en los materiales se obtendrá mediante la ecuación constitutiva que se haya definido para cada uno de los materiales componentes. En caso de utilizar materiales elásticos, se puede verificar con relativa facilidad que las tensiones que se obtengan de aplicar la ley constitutiva cumplirán las condiciones exigidas por las ecuaciones de compatibilidad 10.12 y 10.13. Finalmente, la tensión resultante en el compuesto se puede calcular como:

$${}^c\boldsymbol{\sigma}_P = {}^f\nu {}^f\boldsymbol{\sigma}_P + {}^m\nu {}^m\boldsymbol{\sigma}_P \quad (10.16)$$

De igual modo que es posible obtener las deformaciones en serie de fibra y matriz y, a partir de estas, se pueden calcular las tensiones en los materiales componentes y en el compuesto; también es posible obtener la expresión de la matriz de rigidez del material compuesto a partir de las matrices de rigidez de la fibra y la matriz. Si se utiliza una descomposición de la matriz de rigidez en función de las componentes en paralelo, serie y serie-paralelo, como la mostrada en la ecuación 10.10, las componentes de la matriz de rigidez del compuesto se pueden calcular como:

$$\begin{aligned} {}^c\mathbb{C}_{PP} &= \left( {}^m\nu {}^m\mathbb{C}_{PP} + {}^f\nu {}^f\mathbb{C}_{PP} \right) + {}^m\nu {}^f\nu \left[ \left( {}^m\mathbb{C}_{PS} - {}^f\mathbb{C}_{PS} \right) : \mathbb{A} : \left( {}^f\mathbb{C}_{SP} - {}^m\mathbb{C}_{SP} \right) \right] \\ {}^c\mathbb{C}_{PS} &= {}^m\nu \left( {}^m\mathbb{C}_{PS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SS} \right) + {}^f\nu \left( {}^f\mathbb{C}_{PS} : \mathbb{A} : {}^m\mathbb{C}_{SS} \right) \\ {}^c\mathbb{C}_{SP} &= {}^m\nu \left( {}^f\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m\mathbb{C}_{SP} \right) + {}^f\nu \left( {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SP} \right) \\ {}^c\mathbb{C}_{SS} &= \frac{1}{2} \left( {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SS} + {}^f\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m\mathbb{C}_{SS} \right) \end{aligned} \quad (10.17)$$

Una vez conocida la forma de la matriz de rigidez del compuesto, a no ser que se quieran conocer las tensiones y deformaciones de los distintos materiales componentes, ya no es necesario pasar por estos para obtener el comportamiento del material compuesto. Ahora bien, si se quiere considerar una posible rotura de la fibra o de la matriz del compuesto, es necesario el cálculo de las tensiones de cada uno de los componentes. Y, en caso de que alguno de ellos pierda el comportamiento lineal, la dirección en serie de la matriz calculada según la ecuación 10.14 ya no tiene por qué ser correcta. En este caso, el modo en que se debe proceder se indica a continuación.

### 10.3.2.1. Cálculo no lineal del material compuesto

En caso de que los materiales componentes no estén en régimen elástico, se pierde la proporcionalidad entre tensión y deformación y, por tanto, la ecuación con la que se ha obtenido la deformación en serie de la matriz (ecuación 10.14) pierde su validez, así como también pierde validez la expresión de la matriz de rigidez del compuesto (ecuación 10.17). En este caso es necesario un proceso iterativo con el que encontrar los valores de la deformación en serie de la matriz y la fibra que permiten verificar las condiciones de compatibilidad. En este proceso iterativo se deberá verificar que la diferencia entre las tensiones en serie de fibra y matriz, para la iteración  $n$ , son menores que una cierta tolerancia:

$$[\Delta\sigma_S]^n = [{}^f\sigma_S]^n - [{}^m\sigma_S]^n \leq \textit{tolerancia} \quad (10.18)$$

El proceso iterativo parte de una predicción de las deformaciones en serie de la matriz que utiliza la expresión definida en la ecuación 10.14. En caso de que no se verifique la tolerancia, se deberá corregir la predicción inicial. Para ello se propone utilizar el sistema de Newton-Raphson, que realiza esta corrección mediante el jacobiano de las fuerzas residuales. El jacobiano en este caso se puede calcular como:

$$\mathbf{J} = [{}^m\mathbf{C}_{SS}^t]^n + \frac{{}^m\nu}{{}^f\nu} [{}^f\mathbf{C}_{SS}^t]^n \quad (10.19)$$

Siendo  ${}^m\mathbf{C}_{SS}^t$  y  ${}^f\mathbf{C}_{SS}^t$  las componentes en serie del tensor de rigidez tangente de la matriz y la fibra, respectivamente. Y la nueva predicción de la deformación en serie de la matriz, en el paso  $n + 1$  pasa a ser:

$$[{}^m\boldsymbol{\varepsilon}_S]^{n+1} = [{}^m\boldsymbol{\varepsilon}_S]^n - \mathbf{J}^{-1} : [\Delta\sigma_S]^n \quad (10.20)$$

Las deformaciones en serie de la matriz se deberán corregir las veces que sean necesarias hasta alcanzar la convergencia impuesta (ecuación 10.18) y, de este modo, obtener un estado tenso-deformacional en el compuesto y sus componentes que verifique las condiciones de compatibilidad (ecuaciones 10.12 y 10.13). La tensión final en el compuesto se obtiene según se indica en la ecuación 10.16.

En un cálculo no lineal, es necesario utilizar la matriz tangente del material para mejorar la convergencia del problema. La matriz tangente del compuesto se calculará con la expresión previamente indicada (ecuación 10.17) utilizando en este caso los matrices de rigidez tangentes de la fibra y la matriz.

En este punto es importante volver a remarcar que tanto la fibra como la matriz se pueden simular con cualquier ley constitutiva que se desee: elasticidad, plasticidad, daño, daño-plástico, etc., ya que la única información que necesita la teoría de mezclas serie-paralelo es el valor de las tensiones resultantes en el material, para una deformación dada, así como la matriz de rigidez tangente del material.

### 10.3.3. Implementación en un código de elementos finitos

La implementación de la teoría de mezclas serie-paralelo en un código de elementos finitos se puede realizar siguiendo el diagrama de flujo que se muestra en la Figura 10.5.

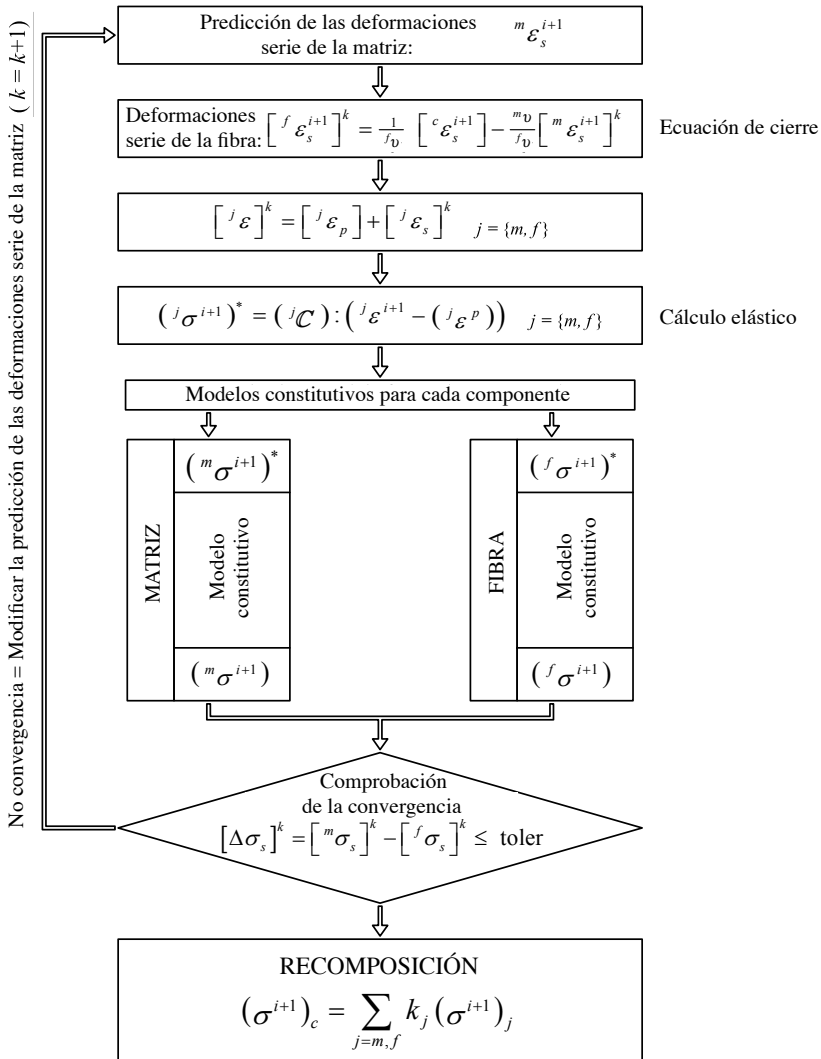


Figura 10.5: Diagrama de flujo de la teoría de mezclas serie-paralelo.

## 10.4. Ejemplos de aplicación

La teoría de mezclas serie-paralelo se puede utilizar para predecir el comportamiento lineal y no-lineal de elementos estructurales realizados con materiales compuestos. En la forma en que se ha presentado la teoría, los materiales compuestos que se pueden simular son aquellos formados por fibras largas embebidas en una matriz. Si bien esto puede parecer una restricción, la mayor parte de los materiales compuestos utilizados en ingeniería tienen esta configuración. Ejemplos de estos en el campo de la ingeniería civil son los laminados unidireccionales utilizados en la reparación de puentes, los perfiles pultrusionados utilizados como

vigas o el hormigón armado, en el que las fibras corresponden a las armaduras y la matriz es el hormigón.

En la presente sección se muestran dos ejemplos que pretenden ilustrar el comportamiento y potencial de la formulación presentada. El primer ejemplo se utiliza para mostrar como es el comportamiento de la formulación cuando un mismo material compuesto se carga en su dirección en paralelo y en serie. El compuesto considerado en este ejemplo consiste en una mezcla de resinas al 50%. Si bien no se conoce del uso de un compuesto semejante, el hecho de que los materiales componentes tengan propiedades mecánicas semejantes facilita la comprensión del comportamiento de la teoría y la visualización de los resultados.

El segundo ejemplo corresponde a la simulación de un proceso de delaminación. La delaminación es, probablemente, uno de los modos de rotura más comunes en los laminados compuestos. En este, las capas del compuesto se separan haciendo que el material pierda toda su resistencia a flexión y cortante. Se muestra que la teoría de mezclas es capaz de predecir este modo de rotura de forma natural.

### 10.4.1. Simulación de un compuesto de resinas

En el presente ejemplo se muestra la predicción que hace la teoría de mezclas serie-paralelo según si el material utilizado se carga en la dirección en serie o en paralelo. Para ello se ha considerado el compuesto mostrado en la Figura 10.6. Este está formado por un 50% de poliéster BPA y un 50% de epoxy 8552 (véase Tabla 10.1). Ambos componentes se disponen en capas de forma que es posible cargar el material asegurando una misma deformación de todas las capas (carga en paralelo) o una misma tensión en cada una de las capas (carga en serie). La Figura 10.6 muestra ambos casos de carga.

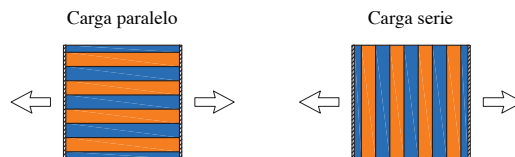


Figura 10.6: Material compuesto considerado y direcciones de carga.

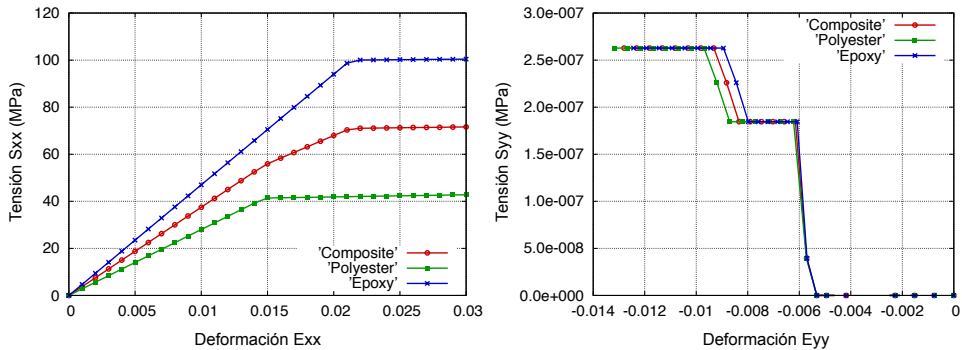
Las propiedades mecánicas<sup>1</sup> de ambos materiales son las que se muestran en la Tabla 10.1). Una vez alcanzada la carga crítica en cada uno de los materiales, se ha considerado que ambos son capaces de mantener la carga a medida que aumenta la deformación. De este modo se facilita la visualización del comportamiento de la formulación.

Resina	Módulo elástico (GPa)	Módulo Poisson	Límite elástico (MPa)
BPA Poliester	2.8	0.38	41.4
Epoxy 8552	4.7	0.38	100

Tabla 10.1: Propiedades mecánicas de las resinas consideradas.

<sup>1</sup>Los valores mostrados en la tabla se han obtenido de [5] y ambas resinas se han definido con propiedades isotrópicas.

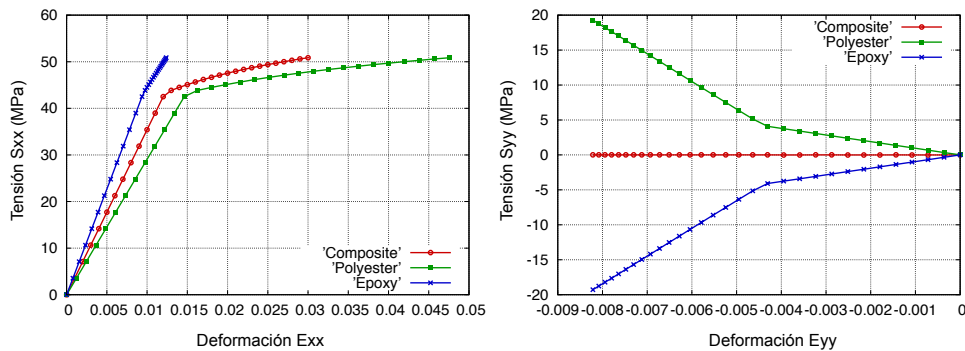
Cuando el compuesto que se acaba de describir se carga en su dirección en paralelo, el comportamiento que se obtiene es el mostrado en la Figura 10.7. Esta muestra como la deformación del poliéster y del epoxy es idéntica en cada uno de los pasos de carga. La tensión resultante en el compuesto es una media de las dos, dado que la participación volumétrica de cada componente es del 50 %. Esta figura muestra además que la rigidez del compuesto sufre dos cambios de pendiente, el primero se da cuando daña el poliéster (para una deformación del 1,5 %) y el segundo cuando daña el epoxy (para una deformación del 2,2 %). Luego, la formulación es capaz de ir adaptando el módulo del material compuesto a medida que va cambiando el comportamiento de sus materiales componentes.



**Figura 10.7:** Comportamiento del compuesto bajo cargas en paralelo (izquierda) en la dirección de la carga y (derecha) en la dirección perpendicular a ella.

En esta misma figura se muestra también el comportamiento del compuesto en la dirección perpendicular a la carga. Dado que el movimiento del material en esta dirección se ha dejado libre, las tensiones en la misma son nulas y los valores que se ven corresponden únicamente a errores numéricos de cálculo. No obstante, es importante remarcar que la formulación fuerza que incluso estos errores presenten un comportamiento de iso-tensión, haciendo que las tensiones del compuesto y sus componentes sean idénticas (tal como se ha definido el comportamiento del material en esta dirección). El módulo de Poisson resultante del compuesto se puede obtener a partir de ambos gráficos dividiendo la deformación longitudinal por la transversal. El valor que se obtiene es de 0,42, algo mayor que el de cada uno de los componentes de forma individual.

En la Figura 10.8 se muestra el comportamiento de este mismo material cuando se carga en su dirección en serie. En este caso se observa que el comportamiento no lineal del compuesto queda definido por el material con menor límite elástico. En el caso que nos ocupa, el primero que daña es el poliéster. Una vez este daña, no deja que la resina epoxy pueda incrementar su nivel de carga, puesto que ambos materiales están ligados con una condición de iso-tensión. De modo que el epoxy cambia su curva de carga inducido por el comportamiento del poliéster (aún no habiendo llegado a su límite elástico, el cual es muy probable que no alcance nunca). De nuevo, las tensiones en el compuesto son una combinación de las tensiones que presentan cada uno de los componentes. Igual que en el caso anterior, en la dirección perpendicular a la carga las tensiones en el compuesto son nulas. No obstante, en este caso esto no implica que las tensiones en los componentes sean también nulas. Cada uno



**Figura 10.8:** Comportamiento del compuesto bajo cargas en serie (izquierda) en la dirección de la carga y (derecha) en la dirección perpendicular a ella.

de ellos querría tener una deformación transversal proporcional a su módulo de Poisson y a la deformación longitudinal que sufre, ahora bien, puesto que en esta dirección hay impuesta una condición de iso-deformación, la deformación de ambos componentes ha de ser idéntica lo que fuerza a que uno de ellos se comprima y el otro se traccione. Es interesante ver también como estas tensiones aumentan significativamente cuando el poliéster entra en rango no lineal y, por tanto, cuando la diferencia entre la deformación (en el sentido de aplicación de la carga) en ambos componentes crece. En este caso, el cálculo del módulo de Poisson del compuesto a partir de las deformaciones obtenidas arroja un valor de 0,27.

Mediante este ejemplo se ha pretendido mostrar, a grandes rasgos, el funcionamiento de la teoría de mezclas serie-paralelo; y como esta es capaz de determinar el comportamiento no lineal del material compuesto de forma natural, a partir del comportamiento constitutivo de los materiales componentes. Se ha mostrado también que para utilizar la formulación es necesario conocer el comportamiento mecánico de los materiales componentes, su participación volumétrica en el compuesto y el modo en que estos se relacionan en las distintas direcciones del tensor de deformaciones y/o tensiones (serie o paralelo), pero que no es necesario ningún parámetro mecánico del material compuesto resultante ya que esto lo proporciona la teoría por si sola.

La mayor parte de fallos de los materiales compuestos se dan por la rotura de alguno de sus componentes: grietas y/o fracturas de la matriz, rotura a tracción de las fibras, pandeo de las fibras, etc. Si la ley constitutiva utilizada para predecir los materiales componentes es capaz de predecir estos modos de fallo (por ejemplo, simulando el pandeo de las fibras como una resistencia máxima a compresión de las mismas), la formulación es capaz de predecir el fallo del compuesto y el comportamiento post-crítico del mismo. De hecho, en el siguiente ejemplo se mostrará como la teoría de mezclas serie-paralelo es capaz de predecir el fallo por delaminación en el compuesto.

### 10.4.2. Delaminación de materiales compuestos

Una de las formas de rotura más habituales en los compuestos laminados es la delaminación. Esta consiste en la rotura del laminado a lo largo del plano que separa las distintas



capas del mismo. Esta rotura conduce a una reducción de la rigidez y capacidad resistente el compuesto que puede desembocar en el fallo del mismo.

Muchas de las formulaciones desarrolladas para caracterizar este modo de rotura se basan en definir materiales y/o elementos con características especiales con las que simular el fenómeno. Algunos ejemplos son el uso de elementos interfase [2], la definición de zonas cohesivas [6, 7] o mediante nodos coincidentes tal como hace la *VCCT (Virtual Crack Closure Technique)* [12]. El problema de estos enfoques es que obligan a conocer la zona que delaminará o, en su defecto, hacen necesario añadir estos elementos en todo el modelo, con lo que el coste computacional hace inabordable el problema.

La teoría de mezclas serie-paralelo es capaz de simular el problema de delaminación de forma natural, sin necesidad de definir elementos específicos ni de predefinir el camino que seguirá la fractura. La rotura por delaminación consiste en la pérdida de capacidad de transmisión de tensiones tangenciales entre las capas del compuesto, producida por una fractura entre las mismas. La teoría de mezclas caracteriza este fallo como una rotura del material matriz. La condición de iso-tensión de la teoría de mezclas serie-paralelo fuerza a que el resto de materiales tampoco puedan desarrollar tensiones en la direcciones en serie (entre ellas, la dirección correspondiente a las tensiones tangenciales), lo que se traduce en una pérdida de la rigidez transversal en el compuesto. En el ejemplo que se muestra en este apartado se probará que esta situación equivale a tener el material completamente delaminado. El ejemplo consiste en la simulación del *End Notch Flexure Test (ENF)*, ensayo definido por la *European Structural Integrity Society (ESIS)* que se utiliza para obtener la tenacidad frente a delaminación por cortante de compuestos reforzados con fibras unidireccionales.

#### 10.4.2.1. Descripción del ensayo y del modelo de cálculo

El *ENF* test consiste en flexionar una viga con una fractura inicial en uno de sus extremos. Este ensayo se aplica a un compuesto de fibras de carbono embebidas en una matriz epoxídica. Las fibras en el compuesto están orientadas en la dirección longitudinal de la matriz. La fractura inicial se obtiene mediante un inserto, no adherido a las láminas colindantes, en el plano medio de la viga. El espesor del inserto debe ser menor de 50  $\mu\text{m}$ . La viga tiene una luz de 100 mm y se solicita con una carga concentrada en su centro de luz, que se aplica mediante una prensa con control de desplazamiento. El ensayo consiste en aplicar un desplazamiento vertical a la viga hasta que la fractura inicial se empieza a propagar. El desplazamiento impuesto se aplica hasta que la progresión de la fractura se detiene y la viga recupera su comportamiento elástico, momento en que la viga se descarga. La Figura 10.9 muestra una representación esquemática del ensayo:

Los resultados experimentales de este ensayo han sido proporcionados por el CIMEP (*Centre per a la Innovació en Materials, Estructures i Processos*) de la Universitat de Girona<sup>2</sup>. El ensayo se realizó sobre un laminado fabricado con el prepeg (HexPly 8552), consistente en fibras de carbono unidireccionales embebidas en una matriz polimérica. Las propiedades mecánicas de la fibra y la matriz se muestran en la Tabla 10.2.

<sup>2</sup>Los ensayos se realizaron en el marco del proyecto de investigación CRINCOMP [10]

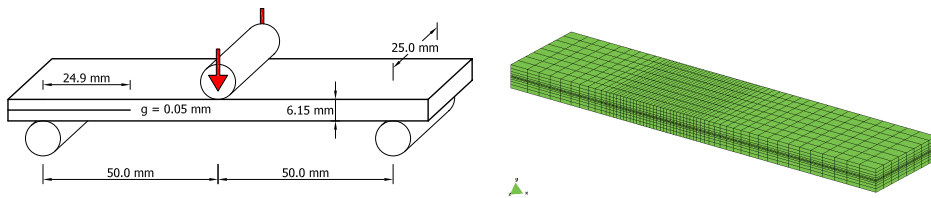


Figura 10.9: Geometría y cargas aplicadas en el ensayo experimental del ENF (izquierda) y malla utilizada para el análisis numérico (derecha).

Propiedades Matriz		Propiedades de la fibra	
Tensión de rotura	120,66 MPa	Tensión de rotura	4278 MPa
Módulo Elástico	4,67 GPa	Módulo Elástico	228 GPa
Módulo de Poisson	0,30	Módulo de Poisson	0,0
Energía de Fractura (Modo I)	0,68 kJ/m <sup>2</sup>	Participación Volumétrica	57,4 %
Participación Volumétrica	42,6 %		

Tabla 10.2: Propiedades mecánicas de la fibra y la resina de las láminas HexPly 8552.

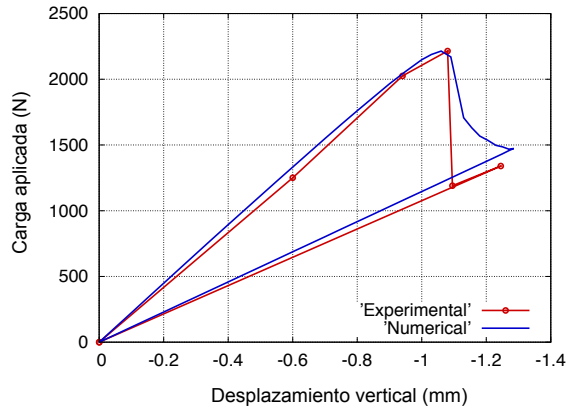
El modelo numérico desarrollado para reproducir el ensayo experimental consta de 5016 elementos hexaédricos lineales. La geometría y la malla del mismo se muestran también en la Figura 10.9. Para realizar la simulación se han definido dos materiales distintos. Uno corresponde al material compuesto, que se ha definido mediante la teoría de mezclas serie-paralelo utilizando las propiedades definidas en la Tabla 10.2 para caracterizar la fibra y la matriz. El otro material corresponde a material inserto, que se caracteriza como un material con un módulo de cortante cercano a cero, lo que permite el deslizamiento entre las capas que separa. El material matriz se ha simulado con un modelo de daño como el descrito en [14], mientras que el material fibra y el material inserto se simulan con un modelo elástico.

#### 10.4.2.2. Comparación de los resultados numéricos y experimentales

La comparación de los resultados numéricos y experimentales se realiza mediante la gráfica fuerza-desplazamiento obtenida para ambos casos. El desplazamiento representado corresponde al desplazamiento vertical del punto donde se aplica la carga. La fuerza corresponde a la carga aplicada. Este gráfico se muestra en la Figura 10.10.

Esta figura muestra un comportamiento idéntico en el ensayo numérico y en la simulación experimental. En ambos casos la viga tiene una rigidez constante hasta que empieza la fractura por delaminación, que se presenta como una caída brusca de la fuerza aplicada. Una vez la delaminación se estabiliza (se frena la caída), la viga se puede seguir deformando con una rigidez reducida. La similitud de ambas curvas permite concluir que la simulación numérica es capaz de reproducir con buena exactitud los resultados experimentales. En concreto:

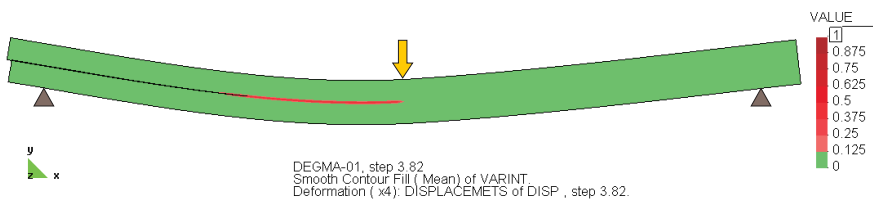
1. La rigidez inicial de la viga numérica y experimental son prácticamente idénticas.
2. La carga máxima que se puede aplicar en ambos casos es prácticamente la misma: 2215 N en el caso experimental y 2214,6 N en el numérico.



**Figura 10.10:** Gráfico fuerza-desplazamiento numérico y experimental del ensayo ENF.

3. La rigidez de la viga una vez ha delaminado es también muy parecida en el caso experimental y numérico: 1076 N/mm y 1146 N/mm, respectivamente.

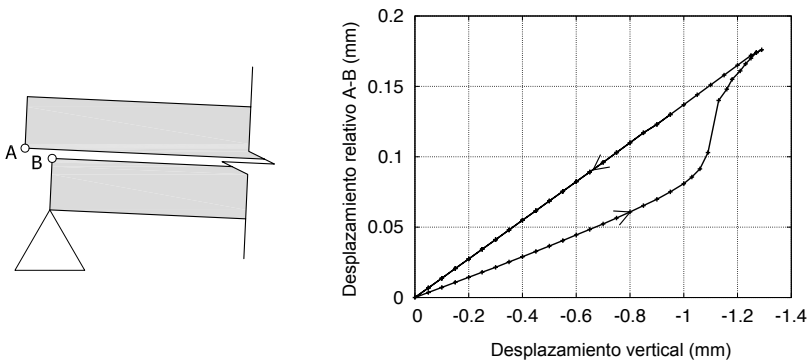
El otro resultado a comparar es la longitud de la zona delaminada al final del ensayo. La longitud de la fractura en el ensayo experimental es de 50,3 mm, exactamente la mitad de la viga. En la simulación numérica, la fractura se habrá extendido a lo largo de todos aquellos puntos en los que el parámetro de daño de la matriz es igual a cero. Tener la matriz completamente dañada implica que esta no es capaz de aportar ninguna rigidez al compuesto y, dado que este se simula con la teoría de mezclas serie-paralelo, implica también que la rigidez del compuesto en la dirección en serie es también nula. No así en la dirección en paralelo, en la que la fibra es capaz de contribuir tanto a la rigidez como a la resistencia. Luego, en todos los puntos con la matriz dañada, el compuesto no puede desarrollar esfuerzos tangenciales lo que equivale a una condición de material delaminado. La Figura 10.11 muestra los puntos con daño en la matriz igual a la unidad. Estos llegan hasta la mitad de la viga, exactamente igual que los resultados experimentales.



**Figura 10.11:** Daño en el material matriz en el instante en que se alcanza la máxima deflexión en la viga.

Una mejor comprensión del comportamiento del modelo numérico se puede obtener observando el desplazamiento relativo de los nodos sobre y bajo el inserto en el apoyo (nodos A y B de la Figura 10.12 izquierda). El desplazamiento relativo de estos dos nodos se muestra en la Figura 10.12 (derecha). En esta figura se puede ver que el desplazamiento de ambos nodos es lineal para los primeros pasos de carga, antes de que empiece la fractura por delaminación.

Esto prueba que el material inserto definido permite el desplazamiento entre ambos nodos y, por tanto, que un material con la rigidez transversal igual a cero equivale a un material delaminado. Una vez la deflexión de la viga se acerca a 1,0 mm, la separación entre ambos nodos crece hasta casi doblar su longitud. Este comportamiento empieza cuando la fractura empieza a propagarse y termina cuando esta alcanza el centro de luz. Durante el proceso de descarga, la distancia entre ambos puntos vuelve a presentar un comportamiento lineal puesto que el material delaminado ya no ofrece ninguna resistencia.



**Figura 10.12:** Desplazamiento relativo entre la superficie superior e inferior de la viga a lo largo del ensayo.

La simulación de este ensayo ha servido para mostrar que la teoría de mezclas serie-paralelo es capaz de reproducir con exactitud resultados experimentales, tanto en su comportamiento lineal como en un comportamiento no lineal. De hecho, el comportamiento no lineal simulado corresponde a una rotura por delaminación del compuesto, uno de los principales modos de rotura de estos materiales. A diferencia de otras formulaciones, que requieren de elementos específicos para localizar y propagar la delaminación, la teoría de mezclas serie-paralelo es capaz de simular esta rotura de forma natural. La capacidad que presenta la teoría para acoplar el comportamiento de los materiales de forma distinta según si están en serie o en paralelo, es la responsable de la correcta simulación de este fenómeno.

## 10.5. Conclusiones

En este capítulo se ha descrito la teoría de mezclas serie-paralelo y su posible implementación en un proceso de cálculo estructural. Se han mostrado también dos ejemplos que muestran el comportamiento de esta formulación. El primer ejemplo ha servido para mostrar la respuesta que se obtiene en el material compuesto según si este se carga en la dirección en serie o en paralelo. El segundo ejemplo ha servido para demostrar el potencial de la formulación, puesto que esta es capaz de reproducir de manera precisa modos de rotura complejos como son los procesos de delaminación.

Una vez se tiene la formulación implementada, esta se puede utilizar para reproducir distintos fenómenos y modos de rotura que se dan en los materiales compuestos. Por ejemplo, es

posible (tal y como se demuestra en el siguiente capítulo de este libro), simular el comportamiento de una viga de hormigón armado sin necesidad de discretizar los distintos elementos de forma individual (hormigón, refuerzos longitudinales, cercos, etc.) y pudiéndose reproducir fenómenos como son el confinamiento que producen los cercos, la rotura del hormigón por tracción, el aplastamiento del hormigón, la plastificación de los refuerzos longitudinales, etc. Además del capítulo en el presente libro, se pueden encontrar ejemplos de estas aplicaciones en las referencias [15–17, 22].

Queda demostrado que la teoría de mezclas serie-paralelo es una potente herramienta para la simulación no-lineal de los materiales compuestos. Además, el coste computacional de la misma es relativamente bajo, lo que permite hacer simulaciones de fenómenos complejos que serían inabordables mediante otras teorías no lineales como puede ser la homogenización. Un ejemplo de estas simulaciones es el ensayo de rotura por impacto publicado en [23].

## 10.6. Líneas futuras

Eligiendo unos modelos constitutivos adecuados para simular el comportamiento de la fibra y la matriz, es posible utilizar la teoría de mezclas serie-paralelo para la caracterización de otros modos de fallo comunes en los laminados compuestos como pueden ser la rotura por tracción de las fibras o la rotura transversal de la matriz [3]. La formulación permite, además, la simulación del compuesto incluyendo cualquier modo de rotura de sus materiales componentes. Por ejemplo, si alguno de los materiales componentes se simula con una formulación capaz de tener en cuenta el fenómeno de fatiga, esta quedará incorporada en el proceso de análisis. En este sentido, se podría utilizar la formulación desarrollada por Salomón y Oller [19] para tener en cuenta la fatiga de las armaduras en estructuras de hormigón armado sometidas a cargas cíclicas.

La formulación presentada no solo se puede utilizar para predecir el fallo de materiales compuestos producido por la rotura de alguno de sus materiales componentes, sino que también se puede modificar para que tenga en cuenta fenómenos más complejos. Un ejemplo de esto es la modificación que se ha hecho de la formulación para poder simular las matrices reforzadas con nanotubos de carbono. La modificación ha consistido en añadir un nuevo material interfaz entre la matriz y la fibra para tener un mayor control sobre la transferencia de cargas entre ambos componentes [21].

Otro ejemplo que muestra la versatilidad de la formulación y la capacidad de utilizarla para la simulación de fenómenos complejos en materiales compuestos es la modificación que se ha hecho de la misma para predecir el fallo por compresión de compuestos de fibras largas por el pandeo de las fibras [13]. En este caso la formulación se ha modificado para que el comportamiento no lineal de la fibra y de la matriz, no solo afecte al compuesto, sino que afecte también al material componente. De este modo, a medida que daña la matriz, se reduce la capacidad resistente de la fibra a pandeo y, a su vez, a medida que se deforma la fibra se incrementa el daño en la matriz. El procedimiento seguido para realizar esta implementación es extrapolable a otros fenómenos como pueden ser la caracterización del comportamiento de compuestos textiles o *non-crimp fabrics*.

**Agradecimientos** Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España a través de los proyectos "RECOMP", Ref. BIA2005-06952, "DECOMAR", Ref. MAT2003-08700-C03-02 y "DELCOM", Ref. MAT2008-02232/MAT; por el Ministerio de Fomento de España a través del proyecto "Reparación y Refuerzo de Estructuras de Hormigón Armado con Materiales Compuestos"; por "AIRBUS" (España), por el Contrato Nro. PBSO-13-06 "FEMCOM", por "ACCIONA Infraestructuras" (España) a través de los proyectos "CETIC", "Sphera" y "Prometeo". Parte de los desarrollos se realizaron gracias al apoyo del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE). Así mismo, la redacción del capítulo ha sido posible gracias al apoyo del European Research Council a través del Advanced Grant: ERC-2012-AdG 320815 COMP-DES-MAT "*Advanced tools for computational design of engineering materials*". Los autores agradecen sinceramente todo el apoyo recibido.

## Bibliografía seleccionada

Existen varias referencias que describen el comportamiento de los materiales compuestos y su posible simulación elástica lineal hasta rotura. De entre ellas, se pueden destacar las siguientes:

- BARBERO E.J., *Introduction to composite materials design*. 2nd Edition. Philadelphia, USA: Taylor Francis, 2011.
- BARBERO E.J., *Finite element analysis of composite materials*. Philadelphia, USA: Taylor Francis, 2008.
- JONES R.M., *Mechanics of composite materials*. 2nd edition. Philadelphia, USA. Taylor Francis, 1999.
- REDDY J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd ed., CRC Press, 2004.

Ahora bien, para obtener una mejor comprensión del comportamiento no-lineal de los materiales compuestos y su posible simulación numérica, es necesario recurrir a los artículos publicados en revistas científicas. De estos, los más significativos son:

- CAR, C., ZALAMEA, F., OLLER, S., MIQUEL J. AND OÑATE, O. Numerical simulation of fiber reinforced composite materials - two procedures. *International journal of solids and structures*, 39(7): 1967-1986, 2002.
- RASTELLINI, F., OLLER, S., SALOMÓN, O. AND OÑATE, E. Composite materials non-linear modelling for long fibre-reinforced laminates: Continuum basis, computational aspects and validations. *Computers Structures*, 86(9): 879-896, 2008.
- MARTINEZ, X., OLLER, S., RASTELLINI F. AND BARBAT, A.H. A numerical procedure simulating RC structures reinforced with FRP using the serial/parallel mixing theory. *Computers Structures*, 86(15): 1604-1618, 2008.
- MARTINEZ, X.; OLLER, S. Numerical simulation of matrix reinforced composite ma-

terials subjected to compression loads. *Archives of computational methods in engineering*. 16(4): 357-397. 2009.

- MARTINEZ, X., RASTELLINI, F., OLLER, S., FLORES, F. AND OÑATE, E. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Composites Part B: Engineering*. 42(2): 134-144, 2011.
- PÉREZ, M.A., MARTÍNEZ, X., OLLER, S., GIL, L., RASTELLINI, F. AND FLORES, F. Impact damage prediction in carbon fiber-reinforced laminated composite using the matrix-reinforced mixing theory. *Composite Structures*. 104:239-248, 2013.

Algunas de las formulaciones recogidas en estos capítulos se pueden encontrar detalladas en el libro:

- OLLER, S. *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*. Editor: S. Oller. CIMNE, 2002. ISBN: 84-95999-06-4.

## Referencias

- [1] BADILLO, H. *Numerical modelling based on the multiscale homogenization theory. Application in composite materials and structures*. PhD thesis, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE) - UPC, 2012. Director: Sergio Oller.
- [2] BALZANI, C., AND WAGNER, W. An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 9 (2008), 2597 – 2615.
- [3] BARBERO, E., SGAMBITTERA, G., ADUMITROAIE, A., AND MARTÍNEZ, X. A discrete constitutive model for transverse and shear damage of symmetric laminates with arbitrary stacking sequence. *Composite Structures* 93, 2 (2011), 1021–1030.
- [4] BARBERO, E. J. *Finite Element Analysis of Composite Materials*. CRC Press, Taylor & Francis, Philadelphia, USA, 2008.
- [5] BARBERO, E. J. *Introduction to composite materials design, Second Edition*. CRC Press, Taylor & Francis, Florida, USA, 2011.
- [6] BORG, R., NILSSON, L., AND SIMONSSON, K. Modeling of delamination using a discretized cohesive zone and damage formulation. *Composites and Science Technology* 62, 10-11 (2002), 1299–1314.
- [7] CAMANHO, P. P., AND DÁVILA, C. G. Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials. Tech. Rep. TM-2002-211737, NASA, 2002.
- [8] CAR, E. *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. PhD thesis, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE) - UPC, 2000. Directors: Sergio Oller and Eugenio Oñate.
- [9] CAR, E., OLLER, S., AND OÑATE, E. An anisotropic elasto plastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 185, 2-4 (2000), 245–277.
- [10] CORBELLA, B., VICENS, J., AND COSTA, J. Informe de los resultados de los ensayos de propagación de grieta en modo II del "Round Robin Test" del proyecto GRINCOMP (MAT2003-09768-C03). Tech. Rep. 2004-CYT-01-IT01, CIMEP, 2004.
- [11] JONES, R. M. *Mechanics of composite materials, Second Edition*. Taylor & Francis, Philadelphia, USA, 1999.

- [12] KRUEGER, R. Virtual crack closure technique: history, approach and applications. *Applied Mechanics Reviews* 57, 2 (2004), 109–143.
- [13] MARTÍNEZ, X., AND OLLER, S. Numerical simulation of matrix reinforced composite materials subjected to compression loads. *Archives of Computational Methods in Engineering* 16, 4 (2009), 357–397.
- [14] MARTÍNEZ, X., OLLER, S., AND BARBERO, E. *Mechanical response of composites. Chapter: Study of delamination in composites by using the Serial/Parallel mixing theory and a damage formulation*. Springer. ECCOMAS series Edition, 2008.
- [15] MARTÍNEZ, X., OLLER, S., RASTELLINI, F., AND BARBAT, A. A numerical procedure simulating RC structures reinforced with FRP using the serial/parallel mixing theory. *Computers and Structures* 86, 15-16 (2008), 1604–1618.
- [16] MOLINA, M., OLLER, S., BARBAT, A., AND MARTÍNEZ, X. Estudio de estructuras de hormigón reforzadas con FRP mediante la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Ingeniería y Estructuras* 13-14, 1 (2009), 29–54.
- [17] MOLINA, M., OLLER, S., BARBAT, A., AND MARTÍNEZ, X. Análisis numérico de estructuras de hormigón reforzadas con FRP por medio de la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Métodos Numéricos Cálculo y Diseño en Ingeniería* 26, 2 (2010), 135–155.
- [18] OLLER, S., MIQUEL, J., AND ZALAMEA, F. Composite material behaviour using a homogenization double scale method. *Journal of Engineering Mechanics* 131, 1 (2005), 65–79.
- [19] OLLER, S., SALOMÓN, O., AND OÑATE, E. A continuum mechanics model for mechanical fatigue analysis. *Computational Materials Science* 32, 2 (2005), 175–195.
- [20] OÑATE, E. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal*, 2nd ed. CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería), Barcelona, Spain, 1995.
- [21] OTERO, F., MARTÍNEZ, X., OLLER, S., AND SALOMÓN, O. Study and prediction of the mechanical performance of a nanotube reinforced composite. *Composite Structures* 94, 9 (2012), 2920–2930.
- [22] PAREDES, J. A., BARBAT, A., AND OLLER, S. A compression-tension concrete damage model, applied to a wind turbine reinforced concrete tower. *Engineering Structures* 33, 12 (2011), 3559–3569.
- [23] PÉREZ, M. A., MARTÍNEZ, X., OLLER, S., GIL, L., RASTELLINI, F., AND FLORES, F. Impact damage prediction in carbon fiber-reinforced laminated composite using the matrix-reinforced mixing theory. *Composite Structures* 104 (2013), 239–248.
- [24] RASTELLINI, F. *Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos*. PhD thesis, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE) - UPC, 2006. Directors: Sergio Oller and Eugenio Oñate.
- [25] RASTELLINI, F., OLLER, S., SALOMON, O., AND OÑATE, E. Composite materials non-linear modelling for long fibre reinforced laminates: Continuum basis, computational aspects and validations. *Computers and Structures* 86, 9 (2008), 879–896.
- [26] SÁNCHEZ-PALENCIA, E. *Homogenization techniques for composite media*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1987, ch. Boundary layers and edge effects in composites, pp. 121–192.
- [27] SUN, C. T., QUINN, B. J., TAO, J., AND OPLINGER, D. W. Comparative evaluation of failure analysis methods for composite laminates. Tech. Rep. DOT/FAA/AR-95/109, U.S. Department of transportation. Federal aviation administration, 1996.
- [28] TRUSDELL, C., AND TOUPIN, R. *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik III/I ed. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1960.
- [29] ZALAMEA, F. *Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de homogenización*. PhD thesis, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE) - UPC, 2001. Directors: Juan Miquel Canet and Sergio Oller.